DarkMathik

Fachhochschule Dortmund
Fachbereich Informatik

Inhaltsverzeichnis

Analysis

Zu Ihrer Information eine Kleine Tabelle von Funktionen und deren Ableitungen:

Ableitungen

Funktion	**Ableitung**
$x^a (a \in \mathbb{R})$	ax^{a-1}
exp(x)	exp(x)
ln(x)	$\frac{1}{x}$
sin(x)	cos(x)
cos(x)	-sin(x)
tan(x)	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
cot(x)	$-1-\cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
arcsin(x)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos(x)	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctan(x)	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	cosh(x)
cosh(x)	sinh(x)
tanh(x)	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
arsinh(x)	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
arcosh(x)	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
artanh(x)	$\frac{1}{1-x^2}$

F	**F'**
$x^a (a \in \mathbb{R})$	ax^{a-1}
sin x	cos x
cos x	-sin x
e^x	e^x
ln(x)	$\frac{1}{x}$

$u = u(x)$

$v = v(x)$

$c \in \mathbb{R}$

F	**F'**
c*u	c*u'
u±v	u'+v'
u*v	u'v+uv'
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'*v-u*v'}{v^2}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Kettenregel

$(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) * g'(x)$

Beispiel 1

$$f(x) = x^{x+1}$$
$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = x+1$$
$$f(g(x)) = (x+1) = x^2+2x+1$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) * g'(x)$$
$$= 2(g(x)) * 1$$
$$= 2(x+1) = 2x+2$$

Beispiel 2

$$e^{x^2+x}$$
$$f(x) = e^x$$
$$g(x) = x^2+x$$
$$f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{x^2+x}$$
$$(e^{x^2+x})' = f'(g(x)) * g'(x)$$
$$= e^{g(x)} * g'(x)$$
$$= e^{x^2+x} * (2x+1)$$

Beispiele zum Ableiten:

$$f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{8}x^{-\frac{1}{2}} + (-2x^{-3}) = \frac{1}{8\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$$
$$= \sin^{\frac{2}{3}} x = (\sin x)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(\sin x)^{-\frac{1}{3}} \cos x$$
$$= \frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}$$

$$f(x) = \ln(\cos x)$$
$$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f(x) = xe^{-2x}$$
$$f'(x) = e^{-2x} + xe^{-2x}(-2)$$

$$f(x) = e^x \sin(x^2+1)$$
$$f'(x) = e^x \sin(x^2+1) + e^x(\sin(x^2+1))' =$$
$$e^x - \sin(x^2+1) + e^x \cos(x^2+1) * 2x$$

Kurvendiskussion

Nullstellen

$$f(x) = ax^2+bx+c \quad ; a \neq 0$$
$$ax^2+bx+c = 0$$
$$a\left(x^2+\underbrace{\frac{bx}{a}}_{p}+\underbrace{\frac{c}{a}}_{q}\right) = 0$$

D>0 : 2 Nullstellen

D=0 : 1Nullstelle(doppelt)

D<0 : 0 Nullstellen

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$
$$<=> \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$
$$<=> x+\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q} \qquad => x = -\frac{p}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}}_{D}$$

Scheitelpunkt(-form)

$$f(x) = ax^2+bx+c$$
$$= a(x^2+px+q)$$
$$= a\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$$
$$= a\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a * D$$
$$Sch.Pkt\left(-\frac{p}{2} \;;\; a * D\right)$$

Brennpunkt

$y = 2x^2 - 20x + 46$

$y = 2(x^2 - 10x + 23)$

$= 2((x-5)^2 - 2)$

$= 2(x-5)^2 - 4$

ScheitelPunkte$(5/-4)$

$y' = 4x - 20 = 1$

$$x = \frac{21}{4} \to f(\frac{21}{4}) = 2 * \left(\frac{21}{4}\right)^2 - 20 * \frac{21}{4} + 46$$

$$f(\frac{21}{4}) f = \frac{-31}{8}$$

Brennpunkt $\left(5/\frac{-31}{8}\right)$

Tangente in $x = 6$

$f'(x) = 4x - 20$

$f'(6) = 4 \to f(4)$

$f(4) = -2$

$T(x) = mx + b = 4x + b$

$b = -26$

$T(x) = 4x - 26$

Kurvendiskussion

Extrempunkt

$f' = 0,\ f'' \neq 0$

$f' = 0,\ f'' = 0 = ... = f^{(n-1)},\ f^{n} \neq 0, n \text{ gerade}$

$f' = 0,\ \text{Vorzeichenwechsel bei } f'$

Wendepunkt

$f'' = 0,\ f''' \neq 0$

$f'' = 0,\ \text{Vorzeichenwechsel bei } f''$

$f'' = 0,\ f''' = 0 = ... = f^{(n)},\ f^{(n+1)} \neq 0,\ n+1 \text{ ungerade}$

Beispiel zu Kurvendiskussion

$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3 = 0$

$= x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0 \quad \text{Normalform}$

$$pq\ x = -\frac{10}{6} \pm \sqrt{\frac{10^2}{6} - 1} = -\frac{10}{6} \pm \sqrt{\frac{64}{36}} = -\frac{10}{6} \pm \frac{8}{6}$$

$x_1 = -3, \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

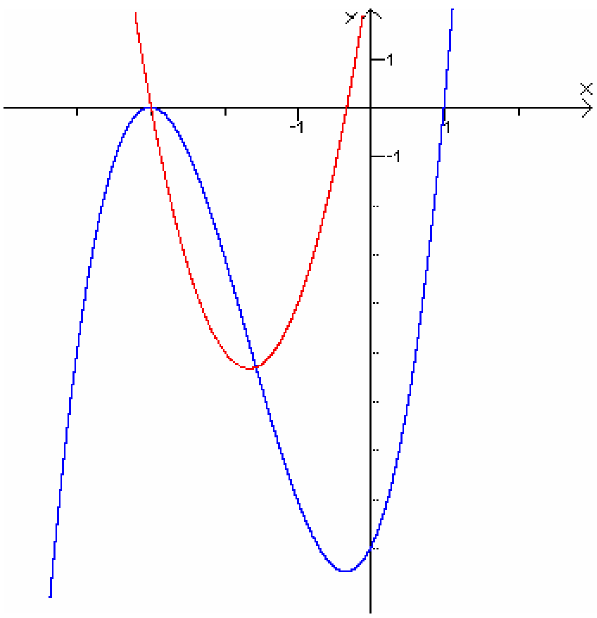
$f''(x) = 6x + 10 \qquad f''(x1) = -8 \max$

$f'''(x) = 6 \qquad f''(x2) = 8 \min$

$P_{\max} = (-3|0) \qquad P_{\min} = (-\frac{1}{3}| \ -9,5)$

$f''(x) = 6x + 10 = 0$

$x'' = -\frac{10}{6} \quad \to f(x) \qquad P_w(-\frac{10}{6}|\ 11,4)$



f(x)=x³+5x²+3x-9

f′(x)=3x²+10x+3

Abstandsfunktion

$$\left|\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Beispiel: Bestimmen sie den Abstand zum Ursprung (0,0)

$f(x)=-2x+8$

$P_1, P_2 \quad , \quad |P_1-P_2|$

$$=\left|\begin{matrix}x\\f(x)\end{matrix}-\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}x\\f(x)\end{matrix}\right|=\sqrt{x^2+(-2x+8)^2}\rightarrow min!$$

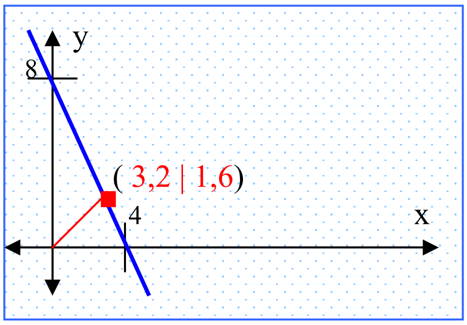
$A^2(x)=x^2+4x^2-32x+64$

$A^2(x)=5x^2-32x+64$

$Q'=10x-32=0,\rightarrow N(Q')=\frac{32}{10}=3\frac{1}{5}$

$Q''=10>0\rightarrow \text{min}$

$y=f(3\frac{1}{5})=-2*3,2+8=1,6$



Punkt mit min Abstand zum Ursprung ist $(3\frac{1}{5}\ |\ 1,6)$

Beispiel mit Satz des Pythagoras

$a'=a^2+b^2$

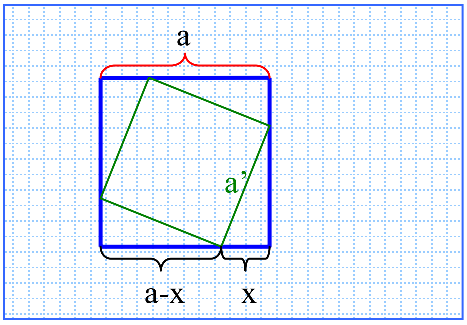
$a'=(a-x)^2+x^2$

$a'=a^2-2ax+2x^2$

$f'=4x-2a=0$

$x=\frac{a}{2}$

$f''=4 \quad NB$



Beispiel für Kurvendiskussion rückwärts

$f(x)=ax^4+bx^2+c$

hat in P(1/2) Wendepunkt deren Tangente durch (0|0) verläuft.

I $\quad 2=a+b+c$

II $\quad 0=12a+2b$

III $\quad 2=4a+2b$

II-III $\rightarrow -2=8a=a=\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$

II-3III $\rightarrow -6=-4b=b=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

ab in I $\rightarrow 2=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+c=c=\frac{8}{4}-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}$

$f'(x)=-x^3+3x$

$f''(x)=-3x^2+3$

Integration

Def. eine differenzierbare Funktion F min F'=f heißt Stammfunktion von f

F	**f**
c	0
c^x sin x	c
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	x^n
$x \neq 0, \ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
-cos x	sin x
sin x	cos x

Def: F Stammfunktion zu f

Dann heißt:

$\int f(x)dx = F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$ unbestimmtes Integral

Rechenregeln

(I) $\int c * f(x)dx = c * \int f(x)dx$

(II) $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Hauptsatz:

F Stammfunktion zu f, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F(b)-F(a)$$

(III) $\int_R^R f(x)dx = 0$

(IV) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^R f(x)dx + \int_R^b f(x)dx = 0 \quad R \in [a,b]$

(V) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Beispiel zur Integralrechnung 1

$f(x) = 4x^3 - 16x \quad [-2,0]$

$F(x) = x^4 - 8x^2 + c$

$$\int_{-2}^{0} (4x^3-16x)dx = \int_{-2}^{0} F(0)-F(-2) = 0-(16-32) = 16$$

Beispiel zur Integralrechnung 2

$f(x) = \frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^2} \quad [1,2]$

$F(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x}$

$$\int_1^2 (\frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^2})dx = \int_1^2 F(2)-F(1) = -3-(-8) = 5$$

Flächenberechnung über Integrale

F über [a,b] integrierbar und es bezeichnet Af den Flächeninhalt über [a,b]
Dann gilt:

$$Af\begin{cases}\int_a^b f(x)dx & f(x) > 0\\ \left|\int_a^b f(x)dx\right| & f(x)<0\\ \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right|+ \quad \underbrace{x_1....x_n}_{Nullstellen}\in[a,b] \quad x_1<x_2......<x_n & +\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|+.....+\left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx\right|+\left|\int_{x_n}^{b} f(x)dx\right|\end{cases}$$

Beispiel zur Flächenberechnung 1 (zwischen Zwei Funktionen)

$f(x)=x^3-x+2$

$g(x)=3x^2-1$

$A_{(f,g)}=?$

$x^3-x+2=3x^2-1 \rightarrow x^3-x+2-(3x^2-1)=0$

$x^3-3x^2-x+3=0$

$(x^3-3x^2-x+3):(x-1)=x^2-2x-3$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3-1x^2} \\ \quad -2x^2 -x \\ \quad \underline{-2x^2+2x} \\ \qquad\quad -3x +3 \\ \qquad\quad \underline{-3x+3} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$pq = x_{1/2}=-1 \ / \ 3$

$x_0=1 \quad x_1=-1 \quad x_2=3$

$[-1,1]+[1,3]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right)=\int\left|F(1)-F(-1)\right|+\left|F(3)-F(1)\right|=$$

$$=\frac{7}{4}+\frac{9}{4}-(-\frac{9}{4}-\frac{7}{4})=\frac{7}{4}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=\frac{32}{4}=8$$

Beispiel zur Flächenberechnung 1: (mit einer unbekannten Konstante)

Für welche k gilt:

$$\int_{x_1}^{x_2} f\,dx=18 \rightarrow f(x)=3x-kx^2$$

$x_1=0 \qquad x_2=\frac{3}{k}$

$$\int_0^{3/k} f(x)dx=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{kx^3}{3}\right)=\int_0^{3/k}\frac{3}{2}*\frac{9}{k^2}-\frac{k}{3}*\frac{27}{2k^2}=\frac{27k^2}{2k^2}-\frac{9}{k^2}=18$$

$$\frac{27-18}{2k^2}=18 \Rightarrow \frac{9}{2k^2}=18 \Rightarrow k^2=\frac{9}{36} \Rightarrow k=\pm\frac{1}{2}$$

$$f(x)=3x\pm\frac{1}{2}x^2$$

Beispiel zur Flächenberechnung 2

$f(x) = x$

$g(x) = x^3$

(I) $\int_{-1}^{1} g(x)dx = \frac{x^4}{4} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

(II) $x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x_1 = 0, \quad x_2 = \pm 1$

$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{-1}^{1} (x^3 - x)dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}) = 0,25 + 0,25 = 0,5$

Beispiele zur Nullstellenberechnung

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x$

(I) $x(x^2 - 2x - 15) = 0$

$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -3$

(II) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 15$

$f''(x) = 6x - 4$

$f'(x) = 0$

$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{5}{3}$

$P_{\min}(3; -36)$

$P_{\max}(-\frac{5}{3}; 23,7)$

(III) $f''(x) = 0$

$x = \frac{2}{3}$

$P_w(\frac{2}{3}; -10,37)$

Beispiel mit Tangenten

$$f(x) = x^2 + 7rx + \frac{13}{4}r^2$$

$\textit{Für welches } r \in \mathbb{R} \textit{ besitzt } f \textit{ in den Schnittpunkten mit der } x-\textit{Achse}$
$\textit{senkrecht aneinander stehend Tangenten!!!}$

$$x_1 = \frac{-7r \pm \sqrt{49r^2 - 13r^2}}{2} = \frac{-7r + 6r}{2} = -\frac{r}{2}$$

$$x_2 = -\frac{13}{4}r$$

$$f'(x) = 2x + 7r = -1$$

$$-r + 7r = 1 \qquad \Rightarrow r = \frac{1}{6}$$

$$-13r + 7r = -1 \quad \Rightarrow r = \frac{1}{6}$$

$$Ti(x) = m_i x + b; \qquad T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow m_1 * m_2 = -1$$

Beispiel Integral rückwärts

f Polynom von Grad 4
f sei symmetrisch zu y-Achse
f schneidet die x-Achse an der −1: Steigung 6
und schließt über [-1 ; 1] mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 76/15 ein.

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$-4a - 2b = 6$$

$$a + b + c = 0$$

$$\int_{-1}^{1} (ax^4 + bx^2 + c) = \left(\frac{ax^5}{5} + \frac{bx^3}{3} + cx \right) dx = \frac{76}{15}$$

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{3} + c - \left(-\frac{a}{5} - \frac{b}{3} - c\right) = \frac{76}{15}$$

$$\frac{2a}{5} + \frac{2b}{3} + 2c = \frac{76}{15}$$

$$6a + 10b + 30c = 76$$

$$3a + 5b + 15c = 38$$

Drei Gleichungen mit 3 Unbekannten:

$$-4a - 2b = 6$$

$$a + b + c = 0$$

$$3a + 5b + 15c = 38$$

$$b = -a - c \qquad => a = c - 3$$

$$b = 2a - 3 \qquad b = 3 - 2c$$

$$3a + 5b + 15c = 38$$

$$3(\underbrace{c-3}_{a}) + 5(\underbrace{3-2c}_{b}) + 15c = 38$$

$$8c = 32$$

$$a = 1; \quad b = -5; \quad c = 4$$

$$y = x^4 - 5x^2 + 4 \qquad y' = 4x^3 - 10x$$

Statistik

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Begriffe:

disj:
Disjunkt heißt, wenn sich die Mengen nicht überschneiden.
$A \cap B = \varnothing$

stu:
Stuchastisch unabhängig, wenn die Ziehung eine andere Ziehung nicht beeinflusst.
Beweis: $W(A \cap B) = W(A) * W(B)$

$$W(A) = 1 - W(\overline{A})$$

$$W(A \cap B) = 1 - W(\overline{A \cap B}) = 1 - W(\overline{A} \cup \overline{B})$$

$$W(A \cup B) = W(A) + W(B) - W(A \cap B)$$

$$W(A \cap B) = W(A) * W(B/A)$$

$$= W(B) * W(A/B)$$

$$W(B/A) = \frac{W(A \cap B)}{W(A)}$$

Wahrscheinlichkeit für B, wenn bekannt ist dass A schon war.

WR: Aufgabe 1

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für

$$W(\overline{A} \cup B)$$

$$\textit{wenn bekannt ist, dass}$$

$$W(A) = \frac{4}{5}$$

$$W(A \cap B) = \frac{3}{10} \; ist.$$

Lösung:

$$W(\overline{A} \cup B) =$$

$$W(\overline{A}) + W(B) - W(\overline{A} \cap B) =$$

$$(1 - W(A)) + W(A \cap B)$$

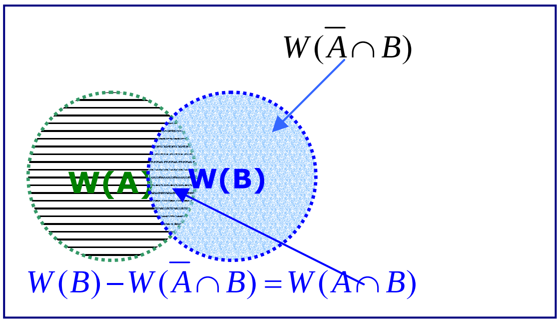
$$1 - \frac{4}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

oder

$$W(\overline{A} \cup B) = 1 - W(A \cap \overline{B})$$

$$1 - W(A) - W(A \cap B)$$

$$\frac{10}{10} - \frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$



WR: Aufgabe 2
In einer Urne sind 10 Rote und 20 Blau Bälle, es wird Zweimal gezogen ohne zurücklegen.
(a) beide Rot
(b) genau eine Rot
(c) die erste Rot, dass min eine Rot ist.

Lösung (a)

$$W(R1 \cap R2) = (disj)$$

$$W(R1) * W(R2 / R1) =$$

$$\frac{10}{30} * \frac{9}{29} = \frac{3}{29}$$

Lösung (b)

$$W(R1 \cap \overline{R2}) \cup W(\overline{R1} \cap R2)$$

$$(W(R1) * W(R1 / \overline{R2})) \cup (W(\overline{R1}) * (W(\overline{R1} / R2)))$$

$$(\frac{10}{30} * \frac{20}{29}) + (\frac{20}{30} * \frac{10}{29}) = \frac{40}{87}$$

Lösung (c)

$$W(R1 / R2 \cup \overline{R2}) =$$

$$\frac{W(R1 \cap (R2 \cup \overline{R2})) = W(R1)}{W(R2 \cup \overline{R2})} = \frac{\frac{10}{30}}{\frac{9}{29} + \frac{20}{29}} = \frac{1}{3}$$

WR: Aufgabe 3
Rote und blaue Lose
2/3 der Roten sind Nieten
90% blau oder Niete
30% blau und keine Niete

- (a) W-keit, dass Rot
- (b) Gewinnt wenn es blau
- (c) Rot, wenn keine Niete

Vorarbeit: 2/3 der Roten sind Nieten $W(N / R)$

90% blau oder Niete $W(\overline{R} \cup N) = 1 - W(R \cap \overline{N})$

30% blau und keine Niete $W(\overline{R} \cap \overline{N})$

Lösung (a)

$$W(R) = W(RN \cap R\overline{N}) = W(RN) + W(R\overline{N})$$

$$= W(R) * W(N / R) + 0,1 = \frac{1}{3} W(R) = 0,1 \;\rightarrow\; W(R) = 0,3$$

Lösung (b)

$$W(R / \overline{N}) = \frac{W(R \cap \overline{N})}{W(\overline{N})} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$$

Lösung (c)

$$W(R / \overline{N}) = \frac{W(R \cap \overline{N})}{W(\overline{N})} = \frac{0,1}{W((R \cap N) \cup (\overline{R} \cap N))} = \frac{0,1}{0,3 + 0,1} = \frac{1}{4}$$

Binomial-

$B(n,\theta)$ $Z.m.Z.$

$$f(k)=\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$$

$$F(k)=\sum_{i=1}^{k} f(i)$$

$$Erwartungswert(x)=n*\theta$$

$$Varianz(x)=n*\theta(1-\theta)$$

f(x) W(X ≤ x) Verteilungsfkt.

F(x) W(X=x) Wahrscheinlichkeitsfkt

Hypergeometrischeverteilung

$$H(N,n,M),\theta=\frac{M}{N}$$

$$f(k)=\frac{\binom{m}{i}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$, N Mögliche Fälle für Erfolg, M Günstige Fälle für Erfolg

$$F(k)=\sum_{i=1}^{k} f(i)$$

$$Erwartungswert(x)=n*\theta$$

$$Varianz(x)=n*\theta(1-\theta)\frac{N-n}{N-1}$$ *Endlichkeits korrekturfaktor*

Beispiel für Binomial-Verteilung 1

Eine Abstimmung in einem Vorstand mit 9 Personen die unabhängig von einander eine Entscheidung treffen müssen.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stimmt die Mehrheit zu

(b) Wenn sich 3 enthalten mit welcher Wahrscheinlichkeit stimmt die Mehrheit trotzdem zu.

Lösung (a)

$$X \sim B(9,\frac{1}{2})$$

$$W(X\geq 5)=\sum_{i=5}^{9}\binom{9}{i}0,5^i(0,5)^{9-i}=\sum_{i=5}^{9}\binom{9}{i}0,5^9$$

$$=\left[\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}\right]0,5^9$$

$$=[126+84+36+9+1]0,5^9=256*0,5^9=0,5$$

oder

$$1-W(X\leq 4)=1-F_B(n=9/x=4,\theta=0,5)=$$

$$1-0,5=0,5$$

Lösung (b)

$$X \sim B(6,\frac{1}{2})$$

$$1-W(X\leq 4)=$$

$$1-F_B(n=6/x=4,\theta=0,5)=$$

$$1-0,8906=0,1094$$

Beispiel für Binomial-Verteilung 2 (6.5)

X = Anzahl der Erfolge $X \sim B(10,\theta)$

$(a) W(X\leq 7),\ X\sim B(10,\ 0,9)$

$(b) W(X\geq 8),\ X\sim B(10,\ 0,5)$

Lösung (a)

$$W(X\leq 7)$$

$$F_B(7)=1-F_{\tilde{B}}(10-7-1),$$

$$\tilde{B}=B(10,\frac{1}{10})=1-F_{\tilde{B}}(4)\leftarrow \textit{Falsch}$$

$$1-0,9984=0,0016\ \textit{Falsch}$$

Lösung (b)

$$1-W(X<8)=1-W(X\leq 7)$$

$$1-F_B(7)=1-\sum_{i=0}^{7} f_B(i)=1-\sum_{i=0}^{7}\binom{10}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=$$

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\sum_{i=0}^{7}\binom{10}{i}=1-0,9453=0,0547$$

Für $\theta>0,5$

$$1-F_B(n-x-1/n;1-\theta)$$

Beispiel für Hypergeometrisch 1 (6.7)
Wir haben ein Spiel 10 Kugeln in einer Urne, 2 davon sind Rot.
man Zieht zwei Kugeln ohne zurücklegen.
(a) Gewinn: Mindestens eine Rote Kugel.
(b) Die Anzahl der Kugeln wird verdoppelt, wie sind die Chancen dann? (Vergleichen).
(c) Wie stehen die Chancen wenn das spiel mit zurücklegen gespielt wird?

Lösung (a)
X = Anzahl der Roten Kugeln

$$X \sim H(N=10, n=2, M=2), \theta = \frac{2}{10}$$

$$X(X \geq 1) = 1 - W(X \leq 0)$$

$$1 - F_H(0) = 1 - 0,6222 = 0,3778$$

oder

$$X(R_1 \cup R_2) =$$

$$1 - (\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = 1 - W(\overline{R_1}) * W(\overline{R_2} / \overline{R_1}) =$$

$$1 - \frac{8}{10} * \frac{7}{9} = 1 - \frac{56}{90} = 1 - 0,6222 = 0,3778$$

Lösung (c)
wenn man das mit Z.m.Z spielen würde wären die Wahrscheinlichkeiten gleich weil die Anzahl der Ziehungen gleich ist und auch die Gewinnwahrscheinlichkeit!!!

Lösung (b)
X = Anzahl der Roten Kugeln

$$X \sim H(N=20, n=2, M=4), \theta = \frac{4}{20}$$

$$X(X \geq 1) = 1 - W(X \leq 0)$$

$$1 - F_H(0) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{16}{2}}{\binom{20}{2}} = 1 - \frac{1*120}{190} =$$

$$1 - 0,63157 = 0,36843$$

oder

$$X(R_1 \cup R_2) =$$

$$1 - (\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = 1 - W(\overline{R_1}) * W(\overline{R_2} / \overline{R_1}) =$$

$$1 - \frac{16}{20} * \frac{15}{19} = 1 - \frac{240}{380} = 1 - \frac{12}{19} = 0,63157 = 0,36843$$

Beispiel für Hypergeometrisch 2
Aus einer Lieferung von N Teilen mit einem Ausschussanteil von µ wird ohne Zurücklegen eine Stichprobe vom Umfang n gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Stichprobe höchstens k defekte Teile gefunden werden, wenn gilt:

a)	N=10	µ=0,2	n=5	k = 1
b)	N=210	µ= 0,2	n=10	k = 2
c)	N=5000	µ= 0,2	n=250	k = 30?

$$X \sim H(N, n, M = N*\theta)$$

Lösung (a)

$$X \sim H(10, 5, 0,2)$$

$$W(X \leq 1) = F_H(1)$$

$$F_{H(10,5,2,1)} = 0,7778$$

oder

$$= W(X=0) + W(X=1) = \frac{\binom{2}{0}\binom{10-2}{10-5}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{2}{1}\binom{10-2}{10-6}}{\binom{10}{5}} = \frac{1*56+2*70}{252} = \frac{196}{252} = 0,\overline{7}$$

Lösung (b)

$$X \sim H(210, 10, 0,2)$$

$$W(X \leq 2) = F_H(2) \quad \textit{Nicht tabelliert}$$

$$\approx B(10, 0,2) = F_{B(10,\ 0,2)}(2) = 0,6778$$

Lösung (c)

$$X \sim H(5000, 250, 0,2)$$

$$W(X \leq 30) = F_H(30) \quad \textit{Nicht tabelliert}$$

$$\approx N(n*\theta = \mu = 50,\ \mu*(1-\theta)*\frac{N-n}{N-1} = \delta^2 = 38,008)$$

$$= W(Z \leq \frac{30-50}{\sqrt{38,008}}) = F_N(-3,244) = 1 - 0,9994 = 0,0006$$

Normalverteilung

$X \sim N, a, b \in \mathbb{R}\ aX + b \sim N$

$\mu = E(aX + b) = aE(X) + b$

$\delta^2 = Var(aX + b) = a^2 Var(X) + b^2$

$stu: X, Y \sim N,\ \ aX - bY \sim N$

$\mu = E(aX - bY) = aE(X) - bE(X)$

$\delta^2 = Var(aX - bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$

$X_1 \ldots X_n \quad stu.\ identisch\ N(\mu, \delta^2)$

μ **E**rwartungswert, Durchschnittswert
δ **Var**ianz, die Abweichung

$X \sim N(\mu, \delta^2)$

$F_N(-z) = 1 - F_N(z)$

$F_N^{**}(z) = 2F_N(z) - 1 \quad symetrisch\ verteilt\ um\ \mu$

Tabelliert ist nur die Std. Verteilung Z~N(0,1)

$Z \sim N(0,1) = F_N(z)$

$F(z) = W(X \leq z)$

$$z = \frac{X - \mu}{\delta}$$

Beispiel für Normalverteilung 1

$X \sim N(\mu = 10, \delta^2 = 9{,}9)$

$W(X \geq 15),\ \ \delta = 3{,}1464$

$1 - W(X \leq 15)$

$$1 - F_N\left(z = \frac{15 - 10}{3{,}1464} = \frac{5}{3{,}1464}\right) =$$

$1 - F_N(1{,}58911) = 1 - 0{,}9440 = 0{,}0560$

Beispiel für Normalverteilung 2

$X \sim N(\mu = 15, \delta^2 = 16)$

$W(X \leq 16)$

$$z = \frac{16-15}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4} = F_N(0,25) = 0,5987$$

$W(X \leq 14)$

$$z = \frac{14-15}{\sqrt{16}} = \frac{-1}{4} = 1 - F_N(0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$$

$W(X > 9)$

$= 1 - W(X \leq 9)$

$$z = \frac{9-15}{\sqrt{16}} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} = 1 - F_n(-1,5) =$$

$1-(1-F_N(1,5)) = F_N(1,5) = 0,9332$

Beispiel für zweiseitige Normalverteilung

$X \sim N(\mu = 15, \delta^2 = 16)$

$W(9 \leq X \leq 17) => W(X \leq 17) - W(X \leq 9)$

$$z = \frac{17-15}{\sqrt{16}} - \frac{9-15}{\sqrt{16}} = F_n(0,5) - F_n(-1,5) =$$

$F_N(0,5) - (1 - F_N(1,5)) = 0,6915 - (1 - 0,9332) = 0,6247$

Beispiel, wenn die Abweichung (δ) unbekannt ist

$X \sim N(4, \delta^2)$

$W(X \geq 6) = 0,2$

$$1 - W(z \leq \frac{6-4}{\delta}) = 0,2$$

$$1 - F_N(\frac{2}{\delta}) = 0,2$$

$$1 - \frac{2}{\delta} = \textit{an der Stelle } (1\text{-}0,2\text{=}0,7998) = 1 - 0,842$$

$2 = 0,842\delta$

$$\delta = \frac{2}{0,842} = 2,3752$$

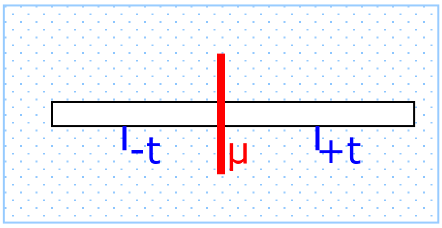
Die Grenzen sind nicht bekannt sind

$X \sim N(4, \delta^2) \qquad \delta^2 = 9$

$W(a \le X \le b) = 0,4592$

$W(\mu - t \le X \le \mu + t) = 0,4592$

$$W\left(\frac{(\mu - t) - \mu}{\delta} \le X \le \frac{(\mu + t) - \mu}{\delta}\right)$$



$W\left(\frac{t}{\delta} \le Z \le \frac{t}{\delta}\right) = 0,4592$

$F_N{**}\left(\frac{t}{3}\right) = 0,4592 \mid= F_N{**}(0,61)$

$\frac{t}{3} = 0,601$

$t = 0,601 * 3 = 1,803$

$W(a = 4 - 1,803 \le X \le b = 4 + 1,803)$

$[a;\; b] = [2,197;\;\; 5,803]$

μ und δ unbekannt sind

$X \sim N$

$W(X > 7) = 0,1587$

$W(X \le 2,5) = 0,3085$

$F_N\left(\frac{2,5 - \mu}{\delta}\right) = 0,3085 \mid 0,6915 = F_n(0,5)$

$1 - F_N\left(\frac{7 - \mu}{\delta}\right) = 0,1587 \mid 0,8413 = F_n(1.0)$

$\frac{\mu - 7}{\delta} = 1 = \mu - 7 = \delta$

$\frac{2,5 - \mu}{\delta} = 0,5 = 2,5 - \mu = 0,5\delta = -2\mu + 5 = \delta$

$2\mu - 14 = 2\delta$

$-2\mu + 5 = \delta$

$\mu = 4$

$\delta = 3 = \delta^2 = 9$

Approximation

Beispiel mit Zweiseitiger Binomial-Verteilung (8.7)

Ein Institut für empirische Sozialforschung wird beauftragt, eine schriftliche Meinungsumfrage durchzuführen. Die Mitarbeiter des Instituts wissen aus Erfahrung, dass sie bei schriftlichen Befragungen mit einer Rücklaufquote von 35% rechnen können.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 1200 versandten Fragebögen mindestens 400 und höchstens 440 zurückgeschickt werden.

(b) Wie viele Fragebögen müssen mindestens verschickt werden, wenn die Anzahl der zurückgesandten Fragebögen mit einer Sicherheit von mindestens 99% nicht weniger als 500 betragen soll?

Lösung (a)

X = *Anzahl der zurückgesandten Fragebögen*

$X \sim B(n=1200 \;\;,\;\; \theta=0,35)$

$W(400 \le X \le 440)$

$appoximation = \mathrm{E(X)} = 420, \ \mathrm{Var(X)} = 273$

$\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(420;\ 273)$

$$= \mathrm{F}^{**}{}_{\mathrm{N}}\left(\frac{400\text{-}420}{\sqrt{273}} = -1,2104 \le z \le \frac{440\text{-}420}{\sqrt{273}} = 1,2104\right)$$

$$= \mathrm{F}^{**}{}_{\mathrm{N}}\left(\frac{20}{\sqrt{273}}\right) = \mathrm{F}^{**}{}_{\mathrm{N}}\ (1,2104) = 0,7737$$

Lösung (b)

?????????????
wird in der Klausur nicht geben
Wieso nicht?

Beispiel mit Zweiseitiger Binomial-Verteilung nicht gleichverteilt um µ

X = *Anzahl für Gewinnlose*

$X \sim B(n=560 \;\;,\;\; \theta=0,03)$

$W(17 < X \le 22)$

$appoximation = \mathrm{E(X)} = 16,8 \ \mathrm{Var(X)} = 16,296$

$\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu=16,8;\ \delta^2 = 16,296)\ \delta=4,0368$

$= \mathrm{W}(X \le 22)\text{-}\mathrm{W}(\mathrm{X} \le 17) =$

$$=\mathrm{F_N}\left(\frac{22\text{-}16}{4,0368}\right)\text{-}\mathrm{F_N}\left(\frac{17\text{-}16,8}{4,0368}\right)=$$

$=\mathrm{F_N}(1,4863)\text{-}\mathrm{F_N}(0,0495)=0,9314\text{-}0,5195=0,4119$

Beispiel mit Zweiseitiger Binomial-Verteilung gleichverteilt um µ

$X \sim B(n=500 \;\;,\;\; \theta=5\%)$

$W(4\% \le X \le 6\%)$

$appoximation\ if\ (n*\theta(1-\theta) > 9)\ \mathrm{E(X)} = 25\ \mathrm{Var(X)} = 23,75$

$\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu=25;\ \delta^2 = 23,75)\ \delta=4,873$

$W(20 \le X \le 30) = \mathrm{W}(X \le 30)\text{-}\mathrm{W}(\mathrm{X} \le 20) =$

$$=\mathrm{F_N}\left(\frac{30\text{-}25}{4,873}\right)\text{-}\mathrm{F_N}\left(\frac{20\text{-}25}{4,873}\right)=\mathrm{F}^{**}{}_{\mathrm{N}}\left(\frac{\pm 5}{4,873}\right)=$$

$\mathrm{F}^{**}{}_{\mathrm{N}}(\pm 1,026)=0,6923$

oder

$\mathrm{F_N}(1,026)\text{-}(1\text{-}\mathrm{F_N}(1,026))=0,8476\text{-}(1\text{-}0,8476)=0,6952$

$2\mathrm{F_N}(1,026)\text{-}1=2*0,8476\text{-}1=0,6952$

Stichprobenanteilswert

SP: Beispiel 1

Die Partei P besitze den Stimmenanteil $\theta = 8\%$ Mit welcher Wahrscheinlichkeit stimmen von n = 12000 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten
(a) mindestens 8,8%
(b) genau 8,1%
für P?

Lösung (a)

$$X = Anzahl\ der\ Wahlstimmen$$
$$X \sim B(n = 12000\ ,\ \theta{=}0,08)$$
$$W(X \geq 8,8\%) = W(X \geq 0,088)$$
$$appoximation = \mathrm{E(X) = 96,\ Var(X) = 883,2}$$
$$\mathrm{X \sim N(\mu{=}960;\ } \delta^2 = 883,2)\ \delta{=}29,7186$$
$$= 1 - W(X \leq 1056)$$
$$= 1\text{-}F_N(z{=}\frac{1056\text{-}960}{29,7186}{=}3,230)$$
$$= 1\text{-}F_N(3,230){=}1\text{-}0,9994{=}\ 0,0006$$

Lösung (b)

$$X = Anzahl\ der\ Wahlstimmen$$
$$X \sim B(n = 12000\ ,\ \theta{=}0,08)$$
$$W(X = 8,1\%)$$
$$appoximation = \mathrm{E(X) = 96,\ Var(X) = 883,2}$$
$$\mathrm{X \sim N(\mu{=}960;\ } \delta^2 = 883,2)\ \delta{=}29,7186$$
$$W(X = 972 \pm 0,5) =$$
$$\mathrm{W}(X \leq 971,5)\text{-}\mathrm{W}(X \leq 972,5){=}$$
$$=F_N(z{=}\frac{972,5\text{-}960}{29,7186}{=}0,42061)\text{-}F_N(z{=}\frac{971,5\text{-}960}{29,7186}{=}0,3869)$$
$$= F_N(0,421)\text{-}F_N(0,387){=}0,6631\text{-}0,6506{=}\ 0,0125$$

SP: Beispiel 2

Binomial

$$X \sim B \approx N$$
$$P = \frac{X}{n}$$
$$P \sim N(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}) <=> N(\frac{n * \theta}{n}, \frac{n * \theta(1-\theta)}{n^2})$$

Hypergeometrisch

$$X \sim H \approx N$$
$$P = \frac{X}{n}$$
$$P \sim N(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)) <=> \delta = \frac{1}{n^2} Var(X)$$

$$X \sim B(n = 200, \theta = 8\%)$$
$$W(P = 10\%)$$
$$P \sim N(8\%, 0,0368\%)\ ,\ \delta_p = 0,1918$$
$$W(0,1 - \frac{1}{2n} \leq P \leq 0,1 + \frac{1}{2n})$$
$$W(0,1 - \frac{1}{400} = 0,0975 \leq P \leq 0,1 + \frac{1}{400} = 0,1025)$$
$$W(\frac{0,0975 - 0,08}{0,01918} \leq P_z \leq \frac{0,1025 - 0,08}{0,01918})$$
$$W(0,9127 \leq P_z \leq 1,173)$$
$$Fn(1,173) - Fn(0,912) = 0,8796 - 0,8191 = 0,0605$$

Lineare Algebra

Einführung Gleichungssysteme

Eine Unbekannte

1. genau eine Lösung
   4*x=12 -> x=3
2. Jede Zahl ist eine Lösung
   0*x=0
3. Keine Lösung
   0*x=2

Zwei Unbekannte

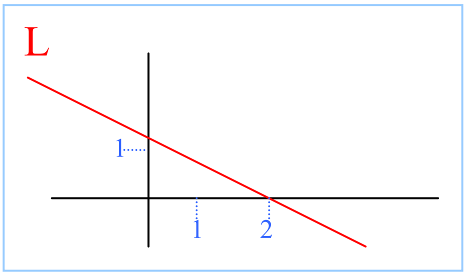
1. genau eine Lösung
   2x+3y=8
   3x+2y=7
   Eliminationsverfahren
   3I-2II -> 5y=10 -> y=2
   2x+6=8 -> x=1
2. Jede Zahl ist eine Lösung
   2x+3y=8
   6x+9y=24
   2I-II -> 0=0 || Unendlich viele Lösungen
   eine:
   x beliebig, (umformen) y = (8-2x)/3
3. Keine Lösung
   2x+3y=8
   4x+6y=7

Graph einer Funktion (Grade)

$2x+3y=4$

$4x+6y=8$

$$L=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{Objekttyp}\;\middle|\;\underbrace{x\ frei\ wählbar, y=\frac{4-2x}{3}}_{Charakterisierende\ Eigenschaft}\right\}$$



Cramersche Regel

GLS $-3x+2y=7$
$4x-3y=11$

-3	2	7		x	7	2		y	-3	7
4	-3	11			11	-3			4	11

(-3)*(-3)=9
-4*4 =-8
1≠0 eindeutig Lösbar

$$x=\frac{7(-3)-11*2}{1}=-43$$

$$y=\frac{(-3)11-4*7}{1}=-61$$

Zahlen Theorie:

Jede natürliche Zahl n>1 ist entweder Primzahl oder lässt sich bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Algorithmus zur Primzahlenzerlegung

(Input)126=2*63=2*3*21=2*3²*7 (Output)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 126 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ 7 & 7 \\ & 1 = ENDE\_KZ \end{array}$$

$$Output = 2*3^2*7$$

Algorithmus zu ggt (Größter gemeinsamer Teiler)

$$ggt(84,30) =$$

$$84 = 2^2*3*7$$

$$\underline{30 = 2*3*5}$$

$$= 2*3 = 6$$

gemeinsame Primzahlen mit kleinstem Exponenten

Euklidischer Divisionsalgorithmus

$$\frac{84}{30}\;\frac{30}{24}\;\frac{24}{6}\;\frac{6}{0}\;\begin{matrix}=ggt\\ ENDE\_KZ\end{matrix}$$

Rest der vorstehenden Division 84%30 in JAVA und C (Modulo-Operation)

Beispiel zum ggt

$$462 = 2*231 = 2*3*77 = 2*3*7*11$$

$$560 = 2*280 = 2^2*140 = 2^3*70 = 2^4*35 = 2^4*5*7$$

oder

$$\frac{560}{462}\;\frac{462}{98}\;\frac{98}{70}\;\frac{70}{28}\;\frac{28}{14}\;\frac{14 = ggt}{0\; ENDE\_KZ}$$

Kleinste gemeinsame Vielfache (kgv)

$$kgv(84,30) =$$

$$84 = 2^2*3*7$$

$$\underline{30 = 2*3*5}$$

$$2^2*3*5*7 = 420$$

alle Primzahlen mit größtem Exponenten

oder

$$\frac{84*30}{ggt(84,30)} = \frac{2^3*3^2*5*7}{2*3} = kgv = 420$$

$$\boxed{kgv(m,n) = \frac{m*n}{ggt(m,n)}}$$

H Hypokomplexe Zahlen

$x = 0,\overline{63} = 0,63\overline{63}$

$$\begin{array}{ll} - \quad \overbrace{10^2}^{\text{Periodenlänge}} & x = 63,\overline{63} \\ & x = -0,\overline{63} \\ \hline 99x = 63 & x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11} \end{array}$$

Aufgabe a

$\frac{29}{11} = 2,\overline{63}$

Aufgabe b

1

$0,2\overline{34}$

$x = 0,2\overline{34} = 0,234\overline{34}$

$$\begin{array}{ll} 10^2 * & x = 23,4\overline{34} \\ - & x = -0,2\overline{34} \\ \hline & 99x = 23,2 \end{array}$$

$x = \frac{232}{10 * 99} = \frac{116}{495}$

2

$0,\overline{147}$

$x = 0,\overline{147} = 0,147\overline{147}$

$$\begin{array}{ll} 10^3 * & x = 147,\overline{147} \\ - & x = -0,\overline{147} \\ \hline & 999x = 147 \end{array}$$

$x = \frac{147}{999} = \frac{49}{333}$

Aufgabe c

1

$17,23\overline{14} - 104,\overline{989}$

$x = 17,23\overline{14} = 17,2314\overline{14}$

$$\begin{array}{ll} 10^2 * & x = 1723,14\overline{14} \\ - & x = -17,23\overline{14} \\ \hline & 99x = 1705,91 \end{array} \quad x = \frac{170591}{9900}$$

$x = 104,\overline{989} = 104,989\overline{989}$

$$\begin{array}{ll} 10^3 * & x = 104989,\overline{989} \\ - & x = -104,\overline{989} \\ \hline & 999x = 104885 \end{array} \quad x = \frac{104885}{999}$$

$$\frac{170591}{9900} - \frac{104885}{999} = -87,7585 = -\frac{877498}{9999}$$

2

$4,31\overline{2} \; : \; 2,3\overline{1}$

$x = 4,31\overline{2} = 4,312\overline{2}$

$$\begin{array}{ll} 10 * & x = 43,12\overline{2} \\ - & x = -4,31\overline{2} \\ \hline & 9x = 38,81 \end{array} \quad x = \frac{3881}{900}$$

$x = 2,3\overline{1} = 2,31\overline{1}$

$$\begin{array}{ll} 10 * & x = 23,1\overline{1} \\ - & x = -2,3\overline{1} \\ \hline & 9x = 20,8 \end{array} \quad x = \frac{208}{90}$$

$$\frac{3881}{900} * \frac{90}{208} = \frac{349290}{187200}$$

q-adische Entwicklung nicht negativer Rationaler Zahlen

- q=10 Dezimalbruchentwicklung
  $718,1_{10}=7*10^2+1*10^1+8*10^0+1*10^{-1}$
- q=2 Dualsystem. Ziffern: 0,1
  $1001,101_2 = 1*2^3+0*2^2+0*2^1+1*2^0+1*2^{-1}+0*2^{-2}+1*2^{-3}$
- q=8 Oktalsystem. Ziffern: 0,1,2,3,4,5,6,7.
- q=10 Dezimalsystem. Ziffern: 0,1….9
- q=16 Hexadezimalsystem Ziffern: 0,1….9,A,B,C,D,E,F
- q=20 Vigesimalsystem
- q=60 Sexagesimalsystem

$718_{10} = ?_{16}$

$ENDE\_KZ$

$$\begin{array}{llll} & 0 & & \\ \uparrow:16 & 2 \to 32 & \downarrow & 2 \to 2 \\ & 44 \to 704 & & 12 \to C \\ & & & 14 \to E \end{array}$$

$718_{10} = 2CE_{16}$

$0,1 = ?_{16}$

$$\begin{array}{lll} 0, & & 0,1 \\ 1 & \downarrow *16 & 0,6 \\ \underline{9} & & 0,6 \end{array}$$

$0,1_{10} = 0,1\overline{9}_{16}$

$0,1 = ?_2$

$$\begin{array}{lll} 0, & & 0,1 \\ 0 & \downarrow *2 & 0,2 \\ 0 & & 0,4 \\ 0 & & 0,8 \\ 1 & & 0,6 \\ 1 & & 0,2 \end{array}$$

$0,1_{10} = 0,0\overline{0011}_2$

$718,1 = ?_{16}$

$= 2CE,1\overline{9}_{16}$

$718 = ?_{60}$

$718/60 = 11m58s$

Aufgaben zur Umwandlung (6)

Aufgabe a

$7815,45_{10} = ?_{16}$

$$\begin{array}{lll} & 1 & 1 \\ & 30 & 14 \\ \uparrow:16 & 488 & 8 \\ 7815 & & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 0, & & 0,45 \\ 7 & \downarrow *16 & 0,2 \\ 3 & & 0,2 \end{array}$$

$1E87,7\overline{3}$

$1E87,7\overline{3}_{16} = ?_2$

$\underbrace{1}_{0001}\ \underbrace{E}_{1110}\ \underbrace{8}_{1000}\ \underbrace{7}_{0111}\ \underbrace{,}_{,}\ \underbrace{7}_{0111}\ \underbrace{\overline{3}}_{\overline{0011}}$

Aufgabe b

$7815,45_{10} = ?_8$

$$\begin{array}{lll} & 1 & 1 \\ & 15 & 7 \\ & 122 & 2 \\ \uparrow:8 & 976 & 0 \\ 7815 & & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 0, & & 0,45 \\ 3 & \downarrow *8 & 0,6 \\ 4 & & 0,8 \\ 6 & & 0,4 \\ 3 & & 0,2 \\ 1 & & 0,6 \end{array}$$

$17207,3\overline{4631}$

Weitere Aufgaben zur Umwandlung in andere Zahlensysteme (7)
Aufgabe a

$47,\overline{428571}_{10} = ?_2$

$$\begin{array}{lrr} & 1 & 1 \\ & 2 & 0 \\ & 5 & 1 \\ & 11 & 1 \\ \uparrow :2 & 23 & 1 \\ 47 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & x = 0,\overline{428571} = 0,428571\overline{428571} \\ 10^6 * & x = 428571,\overline{428571} \\ - & x = -0,\overline{428571} \\ \hline & 999999x = 428571 \end{array}$$

$$x = \frac{428571}{999999} = \frac{3}{7}$$

$$\begin{array}{lcr} 0, & & 3/7 \\ 0 & \downarrow *2 & 6/7 \\ 1 & & 5/7 \\ 1 & & 3/7 \end{array}$$

$$= 101111,\overline{011}_2$$

Aufgabe b

$0,0\overline{5}_{10} = ?_{16}$

$$\begin{array}{rr} & x = 0,0\overline{5} = 0,05\overline{5} \\ 10* & x = 0,5\overline{5} \\ - & x = -0,0\overline{5} \\ \hline & 9x = 0,5 \end{array}$$

$$x = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

$$\begin{array}{lcr} 0, & & 1/18 \\ 0 & \downarrow *16 & 16/18 \\ 14 & 256 & 4/18 \\ 3 & 64 & 10/18 \\ 8 & 160 & 16/18 \end{array}$$

$$= 0,0\overline{E38}_{16}$$

Horner - Schema

$213,4_8 = 2*8^2 + 1*8^1 + 3*8^0 + 4*8^{-1}$

$$213,4_8 = \frac{2134_8}{10_8} = \frac{1116_{10}}{8_{10}} = 139,5_{10}$$

$$\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 3 & 4 \\ +\,0 & 16 & 136 & 1112 \\ \hline 2 & 17 & 139 & 1116_{10} \end{array} \qquad 1116_{10} = 2134_8$$

(HoSch)$^{-1}$=DiviAlg

Beispiele mit Horner (8)
Aufgabe a

$762,34_8 = ?_{10}$

$$\begin{array}{rrrrr} 7 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ +\,0 & 56 & 496 & 3984 & 31896 \\ \hline 7 & 62 & 498 & 3997 & 31900_{10} \end{array} \qquad \frac{31900_{10}}{64} = 498,4375_{10}$$

Aufgabe b

$1001,0011_2 = ?_{10}$

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ +\,0 & 2 & 4 & 8 & 18 & 36 & 72 & 146 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 9 & 18 & 36 & 73 & 147_{10} \end{array} \qquad \frac{147_{10}}{2^4 = 16} = 9,1875_{10}$$

Weitere Aufgaben mit Perioden (9)
Aufgabe a
$0,\overline{6DB}_{16} = ?_{10}$

$$x = 0,\overline{6DB} = 0,6DB\overline{6DB}$$
$$10^3 * \quad x = 6DB,\overline{6DB}$$
$$- \quad x = -0,\overline{6DB} \qquad x = \frac{1755_{10}}{2457_{10}} = 0,\overline{714285}_{10}$$
$$\underbrace{999}_{2457} x = \underbrace{6DB}_{1755}$$

Aufgabe b
$101,1\overline{10}_2 = ?_{10}$

$101 = 5$
$$x = 0,1\overline{10} = 0,110\overline{10}$$
$$100_2 * \quad x = 11,0\overline{10} \quad = 3$$
$$- \quad x = -0,1\overline{10} \quad = -,5 \qquad x = \frac{25_{10}}{30_{10}} = 0,8\overline{3}_{10}$$
$$3_{10} x = 2,5$$
$$101,1\overline{10}_2 = 5,8\overline{3}_{10}$$

Aufgabe c
$0,0\overline{12}_8 = ?_{10}$

$$x = 0,0\overline{12} = 0,012\overline{12}$$
$$100_8 * \quad x = 1,2\overline{12}$$
$$- \quad x = -0,0\overline{12}$$
$$100_8 - 1x = 1,2_8$$
$$1*8^3 - 1 = 63x = 1,2_8 = 1*8^0 + 2*8^{-1} = 1,25$$
$$x = \frac{125}{6300} = \frac{5}{252} = 0,01\overline{984126}_{10}$$
$$0,0\overline{12}_8 = 0,01\overline{984126}_{10}$$

Unbestimmte Zahlensystemumwandlungen (10)
$0,0\overline{21}_3 = ?_7$

$$x = 0,0\overline{21} = 0,021\overline{21}$$
$$100_3 * \quad x = 2,1\overline{21} \quad = 3$$
$$- \quad x = -0,0\overline{21} \quad = -,5$$
$$100_3 - 1_3 x = 2,1_3$$
$$1*3^2 - 1 = 8_{10} x = 2,(1*3^{-1})_{10} = 2\frac{1}{3} \qquad x = \frac{7}{3*8} = \frac{7}{24}$$

0,	$\downarrow *7$	7 / 24
2	49	1 / 24
0	7	7 / 24

$0,0\overline{21}_3 = 0,\overline{20}_7$

Ganze Zahlen in Vorzeichenbehafteter Dualdarstellung

Short	Int	Long
16Bit	32Bit	64Bit

$16\,Bit$

$$\begin{array}{c|l} - & 2720_{10} \\ -2^{15} & 2^{14}\ 2^{13} \ldots 2^{1}\ 2^{0} \end{array}$$

$[-2^{15}]\cdots\cdots 0 \cdots\cdots [2^{15}-1]$

$Dual\,Codierung$

$\underbrace{1|111}_{F}\ \underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{0000}_{0}| = -2720_{10} = F560_{16}$

$2^{15} - 2720 = 32768 - 2720 = 30048_{10} = 7560_{16}$

$F560 = BigEndian - Fex - Form$

$60F5 = LittleEndian - Hex - Form$

Beispiele zur Codierung (11)

Aufgabe a 16BIT HEX-Dump Big-Endian-Format

2989 → 0BAD

30 000 → 7530

-2989 → F453

-30 000 → 8AD0

Aufgabe b 32BIT HEX-Dump Little-Endian-Format

(1)

47824

$0000BAD0 \rightarrow D0BA0000$

-47824

$$\begin{array}{l} 0000\,B\,A\,D\,0 \\ \hline FFFF4\ 5\ 3\ 0 \end{array}$$

(… 15 16)

$FFFF4530 \rightarrow 3045FFFF$

(2)

64 206

$0000FACE \rightarrow CEFA0000$

$-64\,206$

$$\begin{array}{l} 0000\,F\,A\,C\,E \\ \hline FFFF0\ 53\ 2 \end{array}$$

(… 15 16)

$FFFF0\ 53\ 2 \rightarrow 3205FFFF$

(3)

16436736

$00FACE00 \rightarrow 00CEFA00$

-16436736

$$\begin{array}{l} 00F\,A\,C\,E\,00 \\ \hline FF0\ 5\ 3\ 200 \end{array}$$

(… 15 16)

$FF053200 \rightarrow 003205FF$

(4)

$\underbrace{-30000}_{D08A} + \underbrace{2989}_{AD0B}$

$$\begin{array}{r} 8AD0 \\ +\ 0BAD \\ \hline 967D \end{array}$$

967D im Register

7D96 im Speicher

$\underbrace{9}_{da>8\,(-)}\ \ 67D$

$$\begin{array}{r} 9\,6\,7\,D \\ \hline 6\,9\,8\,3 \end{array}$$

(15 15 15 16)

$-6\,9\,8\,3_{16} \rightarrow HoSch \rightarrow -27011_{10}$

Gleitpunktzahlen in Vorzeichenbehafteter Dualdarstellung (IEEE-754)

float size:32bit
Zahlendarstellung [(-1)^{n}] [1, Matisse] [*2$^{\text{Exponent-127 | 7F}}$]
| VZ | Exponent | Matisse |

Vorzeichen	= **1**bit	GS(1=(-) und 0=(+))
Exponent	= **8**bit	GS(von -127 bis 128)
Matisse	= **23**bit	GS(von 0 bis 8388607)
Gesamt	**= 32bit**	

double size:64bit
Zahlendarstellung [(-1)^{n}] [1, Matisse] [*2$^{\text{Exponent-1023 | 3FF}}$]
| VZ | Exponent | Matisse |

Vorzeichen	= **1**bit	GS(1=(-) und 0=(+))
Exponent	= **11**bit	GS(von -1023 bis 1025)
Matisse	= **52**bit	GS(von 0 bis 4503599627370496)
Gesamt	**= 64bit**	

Unter Big- und Little-Endian versteht man die Anordnung des Most Significant Byte(MSB)
Beispielsweise möchte man den 32Bit-HEX Wert 87654321 in den Speicher schreiben.

Hex:	0x87654321
Big Endian:	0x87 0x65 0x43 0x21
Little Endian:	0x21 0x43 0x65 0x87

Beispiele zur Zahlendarstellung
Aufgabe a

$0{,}1_{10}$ zu 32Bit

$$0{,}1_{10} = 0{,}1\overline{9}_{16} = 1{,}\overline{9}_{16} * 2^{-4} = 1{,}\overline{9}_{16} * 2^{123-127}$$

$$VZ:(-1)^{VZ} \quad = 0_2$$

$$Exponent: 123_{10} = 7B_{16}$$

$$Mantisse: 0{,}999998_{16}$$

$$0011\ \ 1101\ \ 1\overbrace{100}^{1{,}1001}\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100$$

3DCC CCCC

Little-Endian=CCCC CC3D

Aufgabe b

$0{,}1_{10}$ zu 64Bit

$$0{,}1_{10} = 0{,}1\overline{9}_{16} = 1{,}\overline{9}_{16} * 2^{-4} = 1{,}\overline{9}_{16} * 2^{1019-1023}$$

$$VZ:(-1)^{VZ} \quad = 0_2$$

$$Exponent: 1019_{10} = 3FB_{16}$$

$$Mantisse: 0{,}99999999_{16}$$

$$0011\ \ 1111\ 1011\ \ \overbrace{1001}^{1{,}1001}\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ \ 1001\ 1001\ 1001\ 1001$$

3FB999 999999

Little-Endian=999999 99B93F

Weitere Beispiele zu HEX-Dump Zahlendarstellung (12)
Die 64-Bit-IEEE-754-Long-Real Darstellung einer rationalen Zahl in Little-Endian-Hex-Dump-Format lautet: 333333333333F33F
Stellen Sie diese Zahl als Dezimalbruchentwicklung dar!

1) Big-Endian

3FF3 3333 3333 3333

2) Binär-Darstellung

0011 1111 1111 0011 0011 0011 0011 0011 0011 0011 0011 0011 0011 0011 0011 0011

3) Zuweisen

$VZ = 0 \quad \rightarrow +$

$EXP = 011\,1111\,1111_2 = 1023_{10} = 1023_{10} - 1023_{10} = 0$

$Mantisse = 1{,}0011 \quad 0011\,0011\,0011\,0011 \quad 0011\,0011\,0011\,0011 \quad 0011\,0011\,0011\,0011$

$+1{,}\overline{3}_{16} = Als\ Bruch\ in\ Dezimal$

$x = 1{,}\overline{3} = 1{,}3\overline{3}$

$10^1{}_{16} * x = 13{,}\overline{3}$

$x = \ 1{,}\overline{3}$

$15_{10}\, x = 12_{16} \leftrightarrow 16 + 2$

$x = \frac{18}{15} = 1{,}2$

Vektorrechnung+GLS(Gleichungssysteme)

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v_5} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-8\vec{v_1} - 9\vec{v_2} + 28\vec{v_3} - 39\vec{v_4} + 15\vec{v_5} = ?$$

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 56 \\ -28 \\ 56 \\ -84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 78 \\ -117 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

GLS(mxn)=GLS(5x4)

$$\begin{array}{llllll} -1x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & -2x_5 & = 0 \\ -1x_1 & +4x_2 & +1x_3 & & & = 0 \\ -1x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = 0 \\ & 2x_2 & -3x_3 & +3x_4 & -1x_5 & = 0 \end{array}$$

Lösung 1

$$x_1 \ldots\ldots x_5 = 0 \ \ oder \ \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Lösung 2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ 28 \\ -39 \\ 15 \end{pmatrix} aus\ Vektoraufgabe$$

Weitere Lösungen

$$\vec{x} = S \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ 28 \\ -39 \\ 15 \end{pmatrix}, \ S \in \mathbb{R}$$

Wie kommt man auf Lösung 2 und Weitere? ➔ Durch ein Algorithmus!!!

Definition

$$x_1\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}}_{\vec{a_1}}+x_2\underbrace{\begin{pmatrix}a_{12}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}}_{\vec{a_2}}\cdots\cdots x_n\underbrace{\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}}_{\vec{a_2}}=\underbrace{\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}}_{\vec{b}} \qquad kurz: x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+\cdots\cdots x_n\vec{a_n}=\vec{b}$$

GLS	**Vektor**
Lösbar	b lässt sich als LK $a_1 \ldots a_n$ darstellen
Eindeutig lösbar	b lässt sich als LK der $a_1 \ldots a_n$ darstellen
Mehrdeutig lösbar	b lässt sich auf mehr als eine Weise als LK der $a_1 \ldots a_n$ darstellen

Linearspann + Erzeugendensystem

Es seien $\vec{v_1},\cdots\cdots,\vec{v_m}\in\mathbb{R}^n$

1) Die Menge der Vektoren $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, die sich als Linearkombination der $\vec{v_1},\cdots\cdots,\vec{v_m}$ darstellen lassen, bezeichnen wir mit $<\vec{v_1},\cdots\cdots,\vec{v_m}>$ und nennen sie den von $\vec{v_1},\cdots\cdots,\vec{v_m}$ erzeugten **Linearspann**.

2) Das m-tupel E = $(\vec{v_1},\cdots\cdots,\vec{v_m})$ nennen wir in diesem Zusammenhang auch ein **Erzeugendensystem** für $S=<\vec{v_1},\cdots\cdots,\vec{v_m}>$.

Regeldefinitionen

(1) $<\vec{0}>=\{\vec{0}\}$ $\vec{0}$ ist Element eines jeden Linearspanns.

Jeder Linearspann $S\neq\{\vec{0}\}$ besitzt unendlich viele Elemente.

(2) $<\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}>=\{\begin{pmatrix}s\\0\end{pmatrix}\mid s\in\mathbb{R}\}\quad(x_1-Achse)$

(3) $<\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}>=\{\begin{pmatrix}0\\s\end{pmatrix}\mid s\in\mathbb{R}\}\quad(x_2-Achse)$

(4) $<e_1....e_n>=\mathbb{R}^n$

(5) $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\vec{v_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ S=<\vec{v_1},\vec{v_2}>,\ E=<\vec{v_1},\vec{v_2}>$

(6) $<\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}>=<\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}>$

Allgemein gilt: Umnummerierung eines Erzeugendensystems ändert nicht den Erzeugten Linearspann!

(7) $<\vec{v_1},....,\vec{v_{m-1}}>\subseteq<\vec{v_1},....,\vec{v_m}>$

(8) Zu Jedem Linearspann gibt es Unendlich viele Erzeugendensysteme

$S=<\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}>\quad S=<\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\vec{0},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}>\ \mid\ \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Hauptsätze

(i) Ist in einem Erzeugendensystem ein Vektor LK der übrigen, so kann man ihn streichen, ohne den erzeugten Linearspann zu ändern!

(II) Ersetzt man in einem Erzeugendensystem einen Vektor durch die Summe seines t-fachen ($t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$) und einer beliebigen LK der übrigen, so ändert sich nicht der erzeugte Linearspann!

Menge eines Linearspanns

$$S1=S2\ \Leftrightarrow\ \overbrace{S1\subseteq S2}^{\text{S1 Teilmenge von S2}}\ \overbrace{\wedge}^{\text{und}}\ \overbrace{S2\subseteq S1}^{\text{S2 Teilmenge von S1}}$$

Jedes Element-Vektor von S1 ist auch ein Element-Vektor von S2

GSA (Gauß Spalten Algorithmus) Typ 1

Ausgangsschema AS GSA Typ1

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} \\ \hline 4_0 & 5_0 & 3_0 & 2_0 & \boxed{1} \\ 5 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 1 \\ \hline \boxed{14} & 16 & 5 & 6 & 4 \end{array}$$

← Spaltenabtrennung

← **Pivot** != 0 Ausgezeichnete Spalte

← **Zeilenabtrennung** für die Probe

1*I +(-4)*V
1*II +(-5)*V
1*III+(-3)*V
1*IV +(-2)*V
oder belibig von 0 verschiedwene Vielfache

Zeile $\longrightarrow \xi_1 = 1$
Spalte $\longrightarrow \sigma_1 = 5$

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0-Erzeugen mit erlaubten Operationen

Pivotelement * Rechenvektor**+(-**Vektorzahl der Ausgezeichneten Spalte**)***Pivotvektor

Neue Schema NS1

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -5 & -3 \\ \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ \hline -2 & -4 & -7 & -2 \end{array}$$

$\xi_2 = 3$
$\sigma_2 = 1$

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$$

1*II +(-2)*I
1*III+(2) *I
1*IV +(-1)*I

NS2

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 11 & 0 \end{array}$$

$\xi_3 = 2$
$\sigma_3 = 3$

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{-11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

1*II +(0)*III
1*IV +(0)*III

Endschema ES3

$$\begin{array}{cc} \mathrm{II} & \mathrm{IV} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

ENDE_KZ='LA'

Zum Problem: $<\vec{v}_1, \overset{*}{\vec{v}_2}, \vec{v}_3, \overset{*}{\vec{v}_4}, \vec{v}_5> = <\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5>$

denn v1,v4 lassen sich als Linearkombination (LK) von v1,v3,v5 schreiben
v2=?v1+?v3+?v5
Rückwärtsanalyse des GSA für v2:

$$\vec{0} = \mathrm{II}_3 = 1*\mathrm{II}_2 + 0*\mathrm{III}_2 = 1\overbrace{(1*\mathrm{II}_1 - 2*\mathrm{I}_1)}^{\mathrm{II}_2} = 1\overbrace{(1*\mathrm{IV}_0 - 5*\mathrm{V}_0)}^{\mathrm{II}_1} - 2\overbrace{(1*\mathrm{I}_0 - 4*\mathrm{V}_0)}^{\mathrm{I}_1}$$

$$= 1*\mathrm{II}_0 + 3*\mathrm{V}_0 - 2*\mathrm{I}_0 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_5$$

Lösung für v4

$$\Rightarrow \vec{v}_4 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_5$$

GSA Typ 1 eignet sich nur dafür, um festzustellen welche Vektoren LA oder LU sind.
Wunsch-Output einer Vorwärtsanalyse. Lösung **GSA Typ 2**

GSA (Gauß Spalten Algorithmus) Typ 2

AS

I	II	III	IV	V
4	5	3	2	(1)
5	4	1	1	2
5	7	1	3	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
$\boxed{15}$	$\boxed{17}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$

+Rechenregeln

NS1

I	II	III	IV
0	0	0	0
−3	−6	−5	−3
(1)	2	−2	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
−4	−5	−3	−2

NS2

II	III	IV
0	0	0
0	(−11)	0
0	0	0
−2	2	−1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
3	−11	2

ES

	II	IV
	0	0
	0	0
	0	0
$v_1 =$	2	1
$v_2 =$	−1	0
$v_3 =$	0	0
$v_4 =$	0	−1
$v_5 =$	−3	−2

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_5$$

$$\Rightarrow \vec{v}_4 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_5$$

Beispiel Aufgabe(A16)
Bestimmen Sie unter den Vektoren

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\vec{v}_3=\begin{pmatrix}8\\2\\12\end{pmatrix},\vec{v}_4=\begin{pmatrix}-4\\-5\\-2\end{pmatrix},\vec{v}_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

zwei, die sich als LK der übrigen darstellen lassen!

AS

I	II	III	IV	V
1	3	8	−4	(1)
2	−1	2	−5	1
2	4	12	−2	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{23}$	$\boxed{-10}$	$\boxed{4}$

1*I + (-1)*V
1*II + (-3)*V
1*III+ (-8)*V
1*IV + (4)*V

NS1

I	II	III	IV
0	0	0	0
(1)	−4	−6	−1
1	1	4	2
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
−1	−3	−8	4

1*I + (-1)*V
1*II + (-3)*V
1*III+ (-8)*V
1*IV + (4)*V

NS2

II	III	IV
0	0	0
0	0	0
5	10	(3)
4	2	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
−7	−11	3

3*II+ (-5) *IV
3*II+(-10)*IV

ES

	II	III
	0	0
	0	0
	0	0
v_1	7	8
v_2	3	0
v_3	0	3
v_4	−5	−10
v_5	−36	−72

$$\vec{x}=s_1\begin{pmatrix}7\\3\\0\\-5\\-36\end{pmatrix}+s_2\begin{pmatrix}8\\0\\3\\-10\\-72\end{pmatrix}$$

$\vec{0}=7\vec{v}_1+3\vec{v}_2+0\vec{v}_3-5\vec{v}_4-36\vec{v}_5$

$(3)\vec{v}_2=-7\vec{v}_1+5\vec{v}_4+36\vec{v}_5$

$\vec{0}=8\vec{v}_1+0\vec{v}_2+3\vec{v}_3-10\vec{v}_4-72\vec{v}_5$

$(3)\vec{v}_3=-8\vec{v}_1+10\vec{v}_4+72\vec{v}_5$

Aufgabe(A17)
Können folgende Spalten aus einem Schema Nr. 3* des **GSA Typ 2** stammen?
*Unter Mitzählung des AS's ist dies das 4.Schema.

$\begin{array}{c}0\\2\\1\\\underline{3}\\0\\0\\0\\1\\0\end{array}$	$\begin{array}{c}0\\2\\0\\\underline{0}\\0\\0\\0\\1\\0\end{array}$	$\begin{array}{c}0\\0\\0\\\underline{0}\\2\\1\\2\\3\\4\end{array}$	$\begin{array}{c}0\\0\\0\\\underline{0}\\0\\1\\2\end{array}$	$\begin{array}{c}0\\0\\0\\\underline{0}\\0\\1\\2\\3\\4\end{array}$	$\begin{array}{c}0\\\underline{0}\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}$
NEIN nur 1 Null oberhalb der Abtrennung	JA	NEIN unterhalb der Abtrennung fehlt eine Null	NEIN bei 3 Vektoren ist das ES leer	JA	NEIN kann max. in Schema 2 stehen

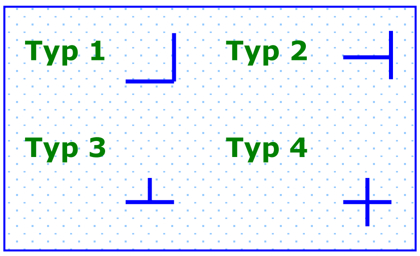
GSA (Gauß Spalten Algorithmus) Typ 3 und 4

GSA Typ 3 = GSA Typ 1 + Zusatzbedingung (Rechts der Spaltenabtrennung darf nicht ausgezeichnet werden!)
GSA Typ 4 = GSA Typ 2 + Zusatzbedingung (Rechts der Spaltenabtrennung darf nicht ausgezeichnet werden!)

AS

	I	II	III	U	W
	(2)	1	4	15	15
	1	1	3	10	11
	1	1	3	10	10
	1	0	0	0	0
	0	1	0	0	0
	0	0	1	0	0
X	0	0	0	1	1
	5	4	11	36	37

Typ 1, Typ 2, Typ 3, Typ 4



Aufgabe(A18)

Es seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix}15\\10\\10\end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix}15\\11\\10\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}, \vec{w} \overset{?}{\in} S = < \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 >$

Falls $\in$ dann Angabe einer LK!

GSA Typ 4

AS

	I	II	III	U	W
	(2)	1	4	15	15
	1	1	3	10	11
	1	1	3	10	10
	1	0	0	0	0
	0	1	0	0	0
	0	0	1	0	0
X	0	0	0	1	1

NS1

	II	III	U	W
	0	0	0	0
	(1)	1	5	7
	1	1	5	5
	-1	-2	-15	-15
	2	0	0	0
	0	1	0	0
X	0	0	2	2

ES

	III	U	W
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	-1
	-1	-5	-4
	-2	-5	-7
	1	0	0
X	0	1	1

Ende-KZ: „LA"

$S = < \vec{v}_1, \vec{v}_2 > = < \vec{v}_1, \vec{v}_3 > = < \vec{v}_2, \vec{v}_3 > \quad \rightarrow \vec{0} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$

$\vec{w} \notin S$

$\vec{u} \in S \Rightarrow \vec{u} = -5\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2$ eine mögliche Lösung

$\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} * s,\ s \in \mathbb{R}$ alle Lösungen

Aufgabe(A19)

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ Geben Sie einen Einheitsvektor des IR^4 an, der in $S = < \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 >$ liegt!

GSA Typ 3

I	II	III	E1	E2	E3	E4
(1)	2	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	2	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1

II	III	E1	E2	E3	E4
0	0	0	0	0	0
(-1)	1	-1	1	0	0
0	0	-1	0	1	0
-1	1	-1	0	0	1

III	E1	E2	E3	E4
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	-1	0	1	0
0	0	-1	0	1

Kein Einheitsvektor ist zu Null ausgelaufen

Keiner der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ liegt in S.

Aufgabe(A20)

Sei $S = \left\langle \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix} \right\rangle$ mit $\varphi \in$ IR. a) Sind $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in S$? b) Ist $\begin{pmatrix}e^{\log_2 \pi}\\\pi^2\end{pmatrix} \in S$?

a) Es müssen folgende LK's existieren:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix} \overset{\text{mit } \cos\varphi \text{ und } -\sin\varphi \text{ für die Skalare}}{\Rightarrow} \cos\varphi\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix} + (-\sin\varphi)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\\\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix} \overset{\text{mit } \sin\varphi \text{ und } \cos\varphi \text{ für die Skalare}}{\Rightarrow} \sin\varphi\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix} + \cos\varphi\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\\\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Die Skalare wurden hier also geschickt so gewählt, daß der Satz des Pythagoras anwendbar wurde. Damit bleibt einem der bei solchen Aufgaben eigentlich erforderliche GSA erspart, zumal der hier wegen des Vorkommens von Parametern bei der Pivotwahl eine Fallunterscheidung mit sich bringen würde.

b) Es muß folgende LK existieren:

$$\begin{pmatrix}e^{\log_2 \pi}\\\pi^2\end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}$$

Nun ist aus a) bekannt, daß beide Einheitsvektoren des IR² $\in S$ sind. Mit den Einheitsvektoren läßt sich aber jeder Vektor darstellen:

$$\begin{pmatrix}e^{\log_2 \pi}\\\pi^2\end{pmatrix} = e^{\log_2 \pi}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \pi^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$ [jetzt werden die entsprechenden LK's für die Einheitsvektoren aus a) eingesetzt]

$$= e^{\log_2 \pi}\cos\varphi\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix} - e^{\log_2 \pi}\sin\varphi\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix} + \pi^2\sin\varphi\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix} + \pi^2\cos\varphi\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$= \left(e^{\log_2 \pi}\cos\varphi + \pi^2\sin\varphi\right)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix} + \left(-e^{\log_2 \pi}\sin\varphi + \pi^2\cos\varphi\right)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}$$

Im Übrigen ist der Linearspann S identisch mit dem IR², da beide Einheitsvektoren in ihm liegen. Somit müssen die beiden S aufspannenden Vektoren linear unabhängig sein.

Anwendung auf Lineare Gleichungssysteme (GLS)

GLS (mxn)

Koeffizientenvektoren:

$$\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m \wedge \vec{b} \neq \vec{0}$$

Homogene (mxn)-Gleichungssysteme

$x_1 \vec{a}_1 + \ldots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$ $\qquad$ $IL_H := IL(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n; \vec{0})$

Dies ist die Menge aller Lösungsvektoren des homogenen GLS.

- Es existiert immer eine triviale Lösung $\Rightarrow \vec{0} \in IL_H$ bzw. $IL_H \neq \varnothing$
- $IL_H = \vec{0} \Leftrightarrow LU(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \Leftrightarrow$ ES bei GSA Typ 1 ist leer
- IL_H ist $\infty \Leftrightarrow LA(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \Leftrightarrow$ ES bei GSA Typ 1 ist nicht leer

Lösung GSA Typ 2:

$$\begin{array}{c|}
\vec{0} \\
\hline
\vec{x}_I \;\; \vec{x}_{II} \ldots \vec{x}_{n-d}
\end{array}$$

(Basis f. Lösungsraum)

Beliebige Linearkombinationen von Lösungsvektoren ergeben wieder Lösungsvektoren. Man sagt auch, IL_H ist abgeschlossen bzgl. der Vektorraumoperationen oder IL_H ist ein linearer Unterraum des IR^n

z.B.

$\vec{h} \in IL_H \Rightarrow s \cdot \vec{h} \in IL_H$ (mit $s \in IR$)

$\vec{g}, \vec{h} \in IL_H \Rightarrow \vec{g} + \vec{h} \in IL_H$

$\vec{i}, \vec{j} \in IL_I \Rightarrow \vec{i} - \vec{j} \in IL_H$

Inhomogene (mxn)-Gleichungssysteme

$x_1 \vec{a}_1 + \ldots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$ $\qquad$ $IL_I := IL(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n; \vec{b})$

Dies ist die Menge aller Lösungsvektoren des inhomogenen GLS.

- Es existiert wegen $\vec{b} \neq \vec{0}$ keine triviale Lösung $\Rightarrow IL_I$ kann leer sein
- $IL_I = \varnothing \Leftrightarrow \vec{b}$ läuft im GSA Typ 3 nicht zu 0 aus
- IL_I ist eindeutig $\Leftrightarrow$ Endschema GSA Typ 3: leer | $\vec{0}$
- IL_I ist $\infty \Leftrightarrow$ Endschema GSA Typ 3: nicht leer | $\vec{0}$

Lösung GSA Typ 4:

$$\begin{array}{c|c}
\text{leer o. wie links} & \vec{0} \\
\hline
\text{leer o. wie links} & \vec{i} \\
\boxtimes & -1
\end{array}$$

Beliebige Linearkombinationen von Lösungsvektoren ergeben im Allgemeinen keine Lösungsvektoren. IL_I ist kein linearer Unterraum des IR^n; man nennt IL_I vielmehr affinen Unterraum.

z.B.

$\vec{i} \in IL_I \Rightarrow (s \cdot \vec{i} \in IL_I \Leftrightarrow s = 1)$

$\vec{i}, \vec{j} \in IL_I \Rightarrow \vec{i} + \vec{j} \notin IL_I$

$\vec{i} \in IL_I \wedge \vec{h} \in IL_H \Rightarrow \vec{i} + \vec{h} \in IL_I$

$$\vec{i} \in IL_I \Rightarrow IL_I = \vec{i} + IL_H$$

Beweis: i) $IL_I \subseteq \vec{i} + IL_H$ (Sei $\vec{j} \in IL_I$, dann folgt daraus $\vec{j} = \vec{i} + (\vec{j} - \vec{i})$ mit $\vec{j} - \vec{i} \in IL_H$)

ii) $IL_I \supseteq \vec{i} + IL_H$ (leicht wegen $\vec{i} + \vec{h} \in IL_I$)

GLS (mxn)

Homogen

GSA Typ 2

$$\begin{array}{c}
a1,\ldots,an \\
\hline
1\text{-}0\text{-}0 \\
0\text{-}1\text{-}0 \\
0\text{-}0\text{-}1
\end{array}$$

Inhomogen

GSA Typ 4

$$\begin{array}{c|c}
a1,\ldots,an & b \\
\hline
1\text{-}0\text{-}0 & 0 \\
0\text{-}1\text{-}0 & 0 \\
0\text{-}0\text{-}1 & 0 \\
0\text{-}0\text{-}0 & 1
\end{array}$$

1) Wenn $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ nicht zu null auslaufen (ES leer)

$\vec{0}$ ist immer eine Lösung ($IL_H = \vec{0}$)

Wenn b nicht zu Null ausläuft

Lösungsmenge ist leer ($IL_I = \varnothing$)

2) Wenn $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ zu null auslaufen (ES nicht leer)

dann ist IL_H =Alles was unterhalb der Abtrennung ist. IL_H ist ∞ (IL_H =<x,y>)

$$\begin{array}{c}
ax= 0\;0 \\
\hline
x\text{-}y \\
x\text{-}y \\
x\text{-}y
\end{array}$$

Wenn b zu Null ausläuft

IL_I ist eindeutig (IL_I= i)

$$\begin{array}{c|c}
\text{leer} & b=0 \\
\hline
 & i \\
\text{leer} & i \\
 & i \\
 & -1
\end{array}$$

3)

Wenn b zu Null ausläuft

IL_I ist ∞ (IL_I= i + s*(<z+y))

$$\begin{array}{c|c}
0\text{-}0 & b=0 \\
\hline
z\text{-}y & i \\
z\text{-}y & i \\
z\text{-}y & i \\
 & -1
\end{array}$$

Lineare Abhängigkeit vs. Lineare Unabhängigkeit (LA , LU)

$$\underset{m\geq 1}{LU(v_1,\ldots,v_m)} \Leftrightarrow \bigwedge_{S_1,\ldots S_m\in\mathbb{R}} (0 = S_1v_1 + \ldots + S_mv_m \Rightarrow S_1 = S_2 = \ldots S_m = 0)$$

$$LA(v_1,\ldots,v_m) \Leftrightarrow \neg LU(v_1,\ldots,v_m)$$

$LA(\vec{v}) \Rightarrow$ Es gibt eine nicht triviale Darstellung des t-Vektors mit Hilfe des v-Vektors

$$LA(\vec{v}) \Rightarrow \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$LU(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n) \in \mathbb{R}^n$$

$LA(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n) \Rightarrow LA(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n+1})$ Fügt man einem LA-Spann ein Vektor hinzu, dann bleibt der Spann LA.

$LA(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n) \not\Rightarrow LA(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n-1})$ umgekehrt nicht.

$LU(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n) \not\Rightarrow LU(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n+1})$ Beim Einfügen könnte der eingefügte eine LK der anderen sein. Also bleibt er nicht LU.

$LU(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n) \Rightarrow LU(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n-1})$ Nimmt man ein LU-Vektor aus einem LU-Spann so bleibt der Spann LU **(3 Hauptsatz)**

Aufgabe(A21)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

a) Welche Einheitsvektoren des IR^3 liegen in S,ggf. LK angeben!

b) Für welche $\vec{w} \in$ IR^3 ist das GLS $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{w}$ lösbar?

a)

	I	II	III	E1	E2	E3
	(1)	0	-1	1	0	0
	3	1	-3	0	1	0
	1	2	-2	0	0	1
	1	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0
X	0	0	0	1	1	1

	II	III	E1	E2	E3
	0	0	0	0	0
	(1)	0	-3	1	0
	2	-1	-1	0	1
	0	1	-1	0	0
	1	0	0	0	0
	0	1	0	0	0
X	0	0	1	1	1

	III	E1	E2	E3
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	(-1)	5	-2	1
	1	-1	0	0
	0	3	-1	0
	1	0	0	0
X	0	1	1	1

	E1	E2	E3
	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
	-4	2	-1
	-3	1	0
	-5	2	-1
X	-1	-1	-1

$\vec{e}_1 \in S \quad \vec{e}_1 = -4\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 - 5\vec{v}_3$

$\vec{e}_2 \in S \quad \vec{e}_2 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$ Die LK's sind eindeutig, wegen LU($\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$)

$\vec{e}_3 \in S \quad \vec{e}_3 = -\vec{v}_1 \qquad - \vec{v}_3$

b) Wegen LU($\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$) ist dim S = 3 und damit S = IR^3

Jeder Vektor des IR^3 liegt in S, das o.g. GLS ist immer (eindeutig) lösbar.

Aufgabe(A22)

Beweisen oder Widerlegen Sie $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$, $S := <\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m>$

a)

$$m > n \Rightarrow S = \mathbb{R}^n$$

$$\forall \bigwedge_{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\in\mathbb{R}^n} (m > n \Rightarrow <\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m> = \mathbb{R}^n)$$

Anzahl der Vektoren Größer als die Anzahl des Raumes, dann spannen die Vektoren den gesamten Raum auf?

FALSCH!

$$<\vec{0},\ldots,\vec{0}> = \{\vec{0}\} \neq \mathbb{R}^n$$

b)

$$S = \mathbb{R}^n \Rightarrow m \geq n$$

Wenn der Linearspann den gesamten Raum aufspannt, dann ist die Anzahl der Vektoren min genau so groß wie der Raum.

$$\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m \mid \vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$$

$$\downarrow GSA-Typ3$$

$$\mid \vec{0},\ldots,\vec{0}$$

$$m \geq d = n$$

c)

$$m < n \Rightarrow S \neq \mathbb{R}^n$$

Die Anzahl der Vektoren ist kleiner als die Raumdimension, daraus folgt dass der Spann den Raum nicht aufspannen kann!

$$\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m \mid \vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$$

$$\downarrow GSA-Typ3$$

$$d \leq m < n$$

d Anzahl der Auszeichnungen
m Anzahl der Vektoren
n Raumdimension

Aufgabe(A23)

Eine Zigarettenfirma produziert 4 Marken Z1, Z2, Z3, Z4, die Tabakmischungen der Sorten A, B, C nach folgenden Mischverhältnissen sind:

	Z1	Z2	Z3	Z4
Sorte A	2	6	2	2
Sorte B	5	4	1	2
Sorte C	2	1	1	1
Nikotin(mg/Z)	1,14	1,08	0,9	.?.

Die Zigaretten haben alle die gleiche Masse. Bestimmen Sie den Nikotingehalt einer Zigarette der Marke Z4!

Zunächst müssen aus den gegebenen Mischungsverhältnissen Spaltenvektoren abgeleitet werden, deren Spaltensumme wegen der gleichen Zigarettenmasse identisch ist (Hier wird die Spaltensumme mit 1 festgesetzt)

$$\begin{array}{l} \\ \text{Sorte A} \\ \text{Sorte B} \\ \text{Sorte C} \end{array} \begin{array}{cccc} Z1 & Z2 & Z3 & Z4 \\ \begin{pmatrix} 2/9 \\ 5/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 6/11 \\ 4/11 \\ 1/11 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es gibt nun 2 Lösungswege:

1)

Man löst das inhomogene GLS:

$$\left.\begin{array}{l} 2/9 \cdot A + 5/9 \cdot B + 2/9 \cdot C = 1{,}14 \\ 6/11 \cdot A + 4/11 \cdot B + 1/11 \cdot C = 1{,}08 \\ 2/4 \cdot A + 1/4 \cdot B + 1/4 \cdot C = 0{,}9 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Für den GSA Typ 4 empfiehlt sich} \\ \text{das Erweitern der Gleichungen mit} \\ \text{9,11 und 4.}\end{array}$$

Als Lösung erhält man, wie viel mg Nikotin die reinen Sorten A,B und C enthalten (in mg/Zigarettenmasse). Mit diesen Werten kann man den Nikotingehalt von Z4 oder jeder anderen Zigarette sofort durch die Gleichung Nikotingehalt = $\text{Anteil}_A \cdot A + \text{Anteil}_B \cdot B + \text{Anteil}_C \cdot C$ bestimmen. Hier ist A = 0,87; B = 1,60 und C = 0,26.

2)

Man ermittelt mit dem GSA Typ 4 die Linearkombination $s_1 \cdot Z1 + s_2 \cdot Z2 + s_3 \cdot Z3 = Z4$. Wenn eine solche eindeutig existiert – d.h. das inhomogene GLS ist eindeutig lösbar–, kann der Nikotingehalt von Z4 mit Nikotingehalt = $s_1 \cdot 1{,}14\text{mg} + s_2 \cdot 1{,}08\text{mg} + s_3 \cdot 0{,}9\text{mg}$ ermittelt werden.

Eine solche eindeutige Lösung existiert nur im Fall von LU(Z1, Z2, Z3).

$$\begin{array}{c|ccc|c|} & Z1 & Z2 & Z3 & Z4 \\ \hline & (2) & 6 & 2 & 2 \\ & 5 & 4 & 1 & 2 \\ & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 9 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 11 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 4 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 5 \\ \hline & \uparrow \cdot 9 & \uparrow \cdot 11 & \uparrow \cdot 4 & \uparrow \cdot 5 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc|c|} & Z2 & Z3 & Z4 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ & (-11) & -4 & -3 \\ & -5 & -1 & -1 \\ \hline & -27 & -9 & -9 \\ & 11 & 0 & 0 \\ & 0 & 4 & 0 \\ X & 0 & 0 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|} & Z3 & Z4 \\ \hline & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & (-9) & -4 \\ \hline & -9 & 18 \\ & 44 & 33 \\ & -44 & 0 \\ X & 0 & -55 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} & Z4 \\ \hline & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ \hline & -18 \\ & -11 \\ & -16 \\ X & 45 \\ \hline \end{array}$$

Die LK lautet also $45 \cdot Z_4 = 18 \cdot Z_1 + 11 \cdot Z_2 + 16 \cdot Z_3$ und der Nikotingehalt von Z_4 errechnet sich als

Nikotingehalt= $(18 \cdot 1{,}14\text{mg} + 11 \cdot 1{,}08\text{mg} + 16 \cdot 0{,}9\text{mg}) \cdot 45^{-1} = 1{,}04\text{mg}$

Aufgabe(A24)

Gegeben seien $S_1 = < \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_l >,\ S_2 = < \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m > \ im\ \mathbb{R}^n$

Geben Sie ein Entscheidungsverfahren zu Lösung von

a)

$$S_1 \overset{?}{\subseteq} S_2 \Leftrightarrow \bigwedge_{v \in \mathbb{R}^n} (\vec{v} \in S1 \Rightarrow \vec{v} \in S2)$$

$$\vec{w}_1 \in S2 \wedge \ldots \wedge \vec{w}_l \in S2$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_1 \ldots \vec{v}_m \,|\, \vec{w}_1 \ldots \vec{w}_l$$

$$\sim \downarrow GSA-Typ3$$

$$|\vec{0} \ldots \vec{0}$$

b)

$$S_1 \overset{?}{=} S_2 \Leftrightarrow S_1 \subseteq S_2 \wedge S_2 \subseteq S_1$$

S1=S2, dann wenn S1 untermenge von S2 ist und umgekehrt.

$$\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_m \,|\, \vec{w}_1 \ldots \vec{w}_l \qquad \vec{w}_1 \ldots \vec{w}_m \,|\, \vec{v}_1 \ldots \vec{v}_l$$

$$\sim \downarrow GSA-Typ3 \qquad \sim \downarrow GSA-Typ3$$

$$|\vec{0} \ldots \vec{0} \qquad |\vec{0} \ldots \vec{0}$$

Noch einfacher ist jedoch ein GSA Typ 1 auf $\vec{w}_1 \ldots \vec{w}_l$. Dann muss lediglich die Anzahl der Auszeichnungen gleich sein.
(wg. dim $S1$=dim $S2$)

Aufgabe(A25)

Es seien

$$S_1=\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\3\\-2\end{pmatrix}\right\rangle, S_2=\left\langle \begin{pmatrix}-1\\7\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\7\\-7\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\3\\3\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Prüfen Sie, ob $S_1 = S_2$ gilt!

GSA Typ 3:
(für $S_2 \subseteq S_1$)

I	II	III	IV	V	VI
(1)	2	-3	-1	8	-3
2	1	0	7	7	3
-2	-1	3	-1	-7	3
-1	4	-2	-3	10	-1

II	III	IV	V	VI
0	0	0	0	0
(-3)	6	9	-9	9
3	-3	-3	9	-3
6	-5	-4	18	-4

III	IV	V	VI
0	0	0	0
0	0	0	0
(-3)	-6	0	-6
-7	-14	0	-14

IV	V	VI
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

GSA Typ 1:
(für dim S_2)

IV	V	VI
(-1)	8	-3
7	7	3
-1	-7	3
-3	10	-1

V	VI
0	0
(-63)	18
15	-6
14	-8

VI
0
0
(12)
28

Es gilt also ($S2 \subseteq S1$) und (dim $S1$ = 3 = dim $S2$), demnach ist $S1 = S2$

Aufgabe(A26)

Prüfen Sie auf Richtigkeit: Für alle $S1, S2 \subseteq \mathrm{IR}^n$ ist $S1 \cup S2$ ein Linearspann!

FALSCH! (Beweis durch Gegenbeispiel)

$S1 = \langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle$ und $S2 = \langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rangle$ Dann ist $S1 \cup S2 = \left\{ \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \text{mit } v_1 = 0 \vee v_2 = 0 \right\}$, das entspricht dem Achsenkreuz.

Nun gibt es im IR² aber nur folgende (verschiedene) Linearspanns:

- den Nullpunkt
- die Nullpunktgerade und
- den IR²

Das Achsenkreuz entspricht keinem dieser Linearspanns.

Für den Beweis wird die Abgeschossenheit bzgl. der Vektorraumoperationen geprüft:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in S_1 \cup S_2 \quad \text{aber} \quad \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin S_1 \cup S_2 \quad \Rightarrow \quad S1 \cup S2$$

ist nicht abgeschlossen bzgl. + $\Rightarrow$ $S1 \cup S2$ ist kein Linearspann

Aufgabe(A27)

$$LU\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) ?$$ **NEIN**

GSA Typ 1:
(für dim $S2$)

I	II	III
(1)	2	1
1	1	2
1	1	2

II	II
0	0
-1	1
-1	1

ENDE_KZ='LA'

Aufgabe(A28)

Für welche $r \in$ IR sind folgende Vektoren linear abhängig $LA\left(\begin{pmatrix}1-r\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1-r\end{pmatrix}\right)$?

GSA Typ I:

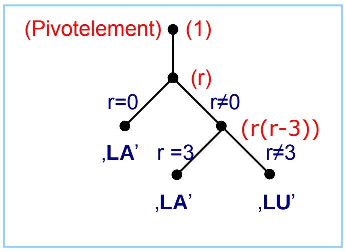
I	II
$1-r$	(1)
1	$1-r$

II
0
$r\,(r-2)$

LA $\Leftrightarrow$ $r \in \{0,2\}$, denn dann bleibt ein Nullvektor stehen

Aufgabe(A29)

Für welche $r \in$ IR gilt $LA\left(\begin{pmatrix}1-r\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1-r\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1-r\end{pmatrix}\right)$?



GSA Typ I:

I	II	III
$1-r$	1	1
(1)	$1-r$	1
1	1	$1-r$

II	III
$r\,(r-2)$	r
0	0
r	$(-r)$

II
$r\,(r-3)$
0
0

LA $\Leftrightarrow r=0 \vee (r=3 \wedge r\neq 0)$

oder kurz LA $\Leftrightarrow r \in \{0,3\}$

Kommen beim GSA Variablen vor, so ist i.d.R. eine Fallunterscheidung notwendig. Allerdings sollte diese erst so spät wie möglich vorgenommen werden, d.h. zunächst sollten variablenfreie Pivotelemente ($\neq 0$) benutzt werden. Die Fallunterscheidung kann in einem Entscheidungsbaum visualisiert werden.

Basis und Dimension

DEF: $\vec{v}_1,\ldots\vec{v}_m \in \mathbb{R}^n, \vec{w}_1,\ldots\vec{w}_d \in \mathbb{R}^n \qquad S := <\vec{v}_1,\ldots\vec{v}_m>$

Ein d-Tupel heißt Basis eines Linearspanns S $\subseteq$ IR^n genau dann wenn

1. $(\vec{w}_1,\ldots\vec{w}_d)$ ein Erzeugendensystem von S ist und
2. LU$(\vec{w}_1,\ldots\vec{w}_d)$ gilt, d.h. das d-Tupel ist minimal.

2 Basen von S erhält man im Zuge des GSA Typ I als $(\vec{v}_{\sigma_1}\ldots\vec{v}_{\sigma_d})$ oder $(\vec{b}_1\ldots\vec{b}_d)$ – also die ausgezeichneten Spalten –, weitere durch Vertauschen bzw. skalare Vielfache der Basisvektoren.
Es gelten ferner folgende Sätze:

- $(\vec{w}_1,\ldots\vec{w}_d)$ ist Basis von S $\Leftrightarrow \left(\vec{w}_1, *\vec{w}_2 + \otimes\vec{w}_1 \ldots \otimes\vec{w}_k, \vec{w}_3 \ldots \vec{w}_k\right)$ ist Basis von S | mit $*, \otimes \in$ IR $\wedge * \neq 0$ (4.Hauptsatz, Beweis über 2. und 3.HS)
- Alle Basen von S besitzen gleichviel Vektoren, die Anz. der Auszeichnungen d im GSA ist also determiniert. (Beweis in Vorlesungsmitschrift)

Bemerkung: Umsortieren der b-Vektoren ergibt eine neue Basis!

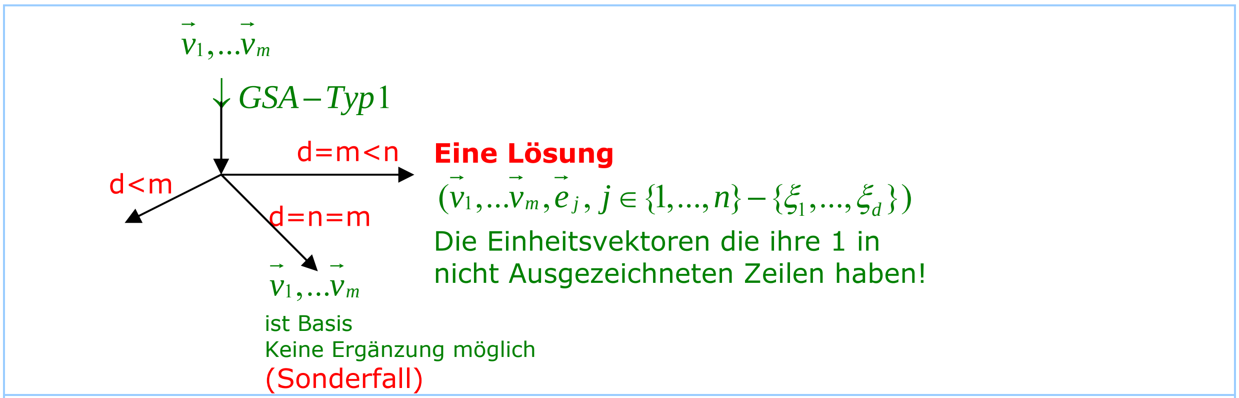
DEF: Diese Anzahl d heißt Dimension von S, dabei gilt per Definition dim$\langle\vec{o}\rangle := 0$.

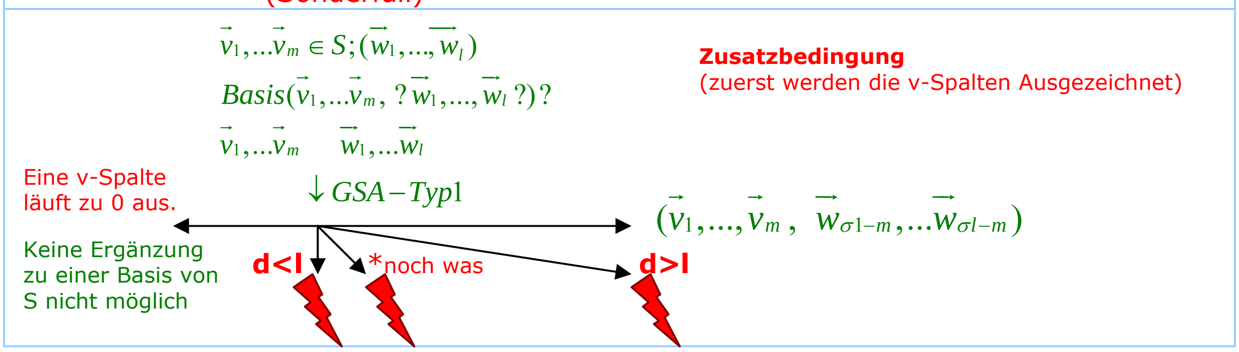
dim S = n – Anzahl der Auszeichnungen.

Dann ist z.B. dim IR^n = n.

Allgemeines Verfahren zur Ergänzung von $\vec{v}_1,\ldots\vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$

a) zu einer Basis der $\mathbb{R}^n$ **, b)zu einer Basis** $\vec{v}_1,\ldots\vec{v}_m \in \mathbb{R}^n(\vec{w}_1,\ldots\vec{w}_l)$ **von S**





Aufgabe(A30)

Sei U die Menge aller Vektoren mit $U = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \\ \vec{v}_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{v}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{v}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \\ \vec{v}_4 \end{pmatrix} \right\}$.

Für welche $r \in$ IR gilt

a) dim U = 0 d) dim U = 3
b) dim U = 1 e) dim U = 4
c) dim U = 2 f) LA(U)

I	II	III	IV
1–r	1	1	1
(1)	1–r	1	1
1	1	1–r	1
1	1	1	1–r

II	III	IV
(2–r) ·r	r	r
0	0	0
r	(–r)	0
r	0	–r

↗ r ≠ 0 (Pivot vorhanden)
↘ r = 0 (Ende-KZ, dim U = 3)

II	III
(3–r) ·r	r
0	0
0	0
r	(–r)

Pivot immer vorhanden (r ≠ 0)

III
(4–r) ·r
0
0
0

↗ r ≠ 4 (Pivot vorh., dim U = 0)
↘ r = 3 (Ende-KZ, dim U = 1)

Lösung: a) dim U = 0 ⇔ $r \in$ IR \ {0,4}
b) dim U = 1 ⇔ r = 4
c) dim U = 2 nie
d) dim U = 3 ⇔ r = 0
e) dim U = 4 nie
f) LA(U) ⇔ r ∈ {0, 4}

Bemerkung

Ein häufiger Fehler ist, dim U mit der Anzahl der Auszeichnungen gleichzusetzen. Dies entspräche aber der Dimension des von den Koeffizientenvektoren des GLS gebildeten Linearspanns. Für U gilt hingegen dim U = n – Anzahl der Auszeichnungen.

Aufgabe(A31)

Für welche $S_1, S_2, S_3 \in$ IR gilt $LU\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1^2 \\ S_2^2 \\ S_3^2 \end{pmatrix}\right)$?

GSA Typ I:

I	II	III
(1)	s_1	s_1^2
1	s_2	s_2^2
1	s_3	s_3^2

II	~~III~~*	III
0	0	0
$(s_2 - s_1)$	$s_2^2 - s_1^2 =$	$(s_2+s_1)(s_2-s_1)$
$s_3 - s_1$	$s_3^2 - s_1^2 =$	$(s_3+s_1)(s_3-s_1)$

↗ $s_2 \neq s_1$ (Pivot vorhanden)
↘ $s_2 = s_1$ ⇒ LA

III
0
0
$(s_3-s_2)(s_3-s_1)$

↗ $s_3 \neq s_2 \wedge s_3 \neq s_1$ ⇒ LU
↘ $s_3 = s_2 \vee s_3 = s_1$ ⇒ LA

LU gilt also für alle $S_1, S_2, S_3 \in$ IR mit $S_1 \neq S_2 \wedge S_1 \neq S_3 \wedge S_2 \neq S_3$.

Aufgabe(A32)

Beweisen oder widerlegen Sie.
Gegeben seien $y_1, y_2, y_3 \in$ IR und paarweise verschiedene $x_1, x_2, x_3 \in$ IR.
Dann gibt es genau ein Polynom (höchstens) 2. Grades mit $y_1=f(x_1)$; $y_2=f(x_2)$; $y_3=f(x_3)$.

Es geht also um den Beweis der Aussage, daß sich ein Polynom 2. Grades immer exakt durch 3 verschiedene, sonst beliebige Punkte legen läßt (so genannte Polynominterpolation).

Mittels der Funktionsgleichungen für die 3 Punkte lässt sich ein inhomogenes GLS aufstellen (die Unbekannten sind hierbei die Koeffizienten):

$$\begin{aligned} a\cdot x_1^2 + b\cdot x_1 + c &= y_1 \\ a\cdot x_2^2 + b\cdot x_2 + c &= y_2 \\ a\cdot x_3^2 + b\cdot x_3 + c &= y_3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad a\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Dieses GLS hat dann genau eine Lösung $\Rightarrow LU\left(\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ gilt. Analog: Lösung A31.

Aufgabe(A33)

Für welche $\varphi \in$ IR gilt $LU\left(\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\right)$?

Die Aufgabe ist analog zu 20:

A20 <", "> = IR² für alle $\varphi \in$ IR $\Rightarrow \bigwedge_{\varphi\in\mathbb{R}} LU$

Anmerkung:
Man betrachte auch, dass im Falle von LA gelten müsste ($a \cdot s = -b$) und ($b \cdot s = a$). Dann müsste für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ die Gleichung $-b/a = a/b$ gelten, die in IR unlösbar ist. Auch bei den Sonderfällen $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ können für die Winkelfunktionen die beiden Gleichungen nicht gelöst werden.

Aufgabe(A34)

$$S1 = <\overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}}^{v_1}, \overbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}}^{v_2}> \text{ und } S2 = <\overbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}^{w_1}, \overbrace{\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}}^{w_2}, \overbrace{\begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix}}^{w_3}>$$

Bestimmen Sie ein Endschema für $S1 \cap S2$!

Ein Vektor $\vec{u}$ des Schnitts muss Element aus $S1$ und $S2$ sein: $\vec{u} \in (S_1 \cap S_2) \Leftrightarrow (\vec{u} \in S_1) \wedge (\vec{u} \in S_2)$

Dann müssen folgende Linearkombinationen existieren:

$$(\vec{u} = s_1 \cdot \vec{v}_1 + s_2 \cdot \vec{v}_2) \wedge (\vec{u} = s_3 \cdot \vec{w}_1 + s_4 \cdot \vec{w}_2 + s_5 \cdot \vec{w}_3)$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot \vec{v}_1 + s_2 \cdot \vec{v}_2 - s_3 \cdot \vec{w}_1 - s_4 \cdot \vec{w}_2 - s_5 \cdot \vec{w}_3 = \vec{o}$$

I	II	III	IV	V
(1)	2	1	3	-2
2	3	1	5	-5
-1	1	2	0	5
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

II	III	IV	V
0	0	0	0
(-1)	-1	-1	-1
3	3	3	3
-2	-1	-3	2
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

III	IV	V
0	0	0
0	0	0
0	0	0
-1	1	-4
1	1	1
-1	0	0
0	-1	0
0	0	-1

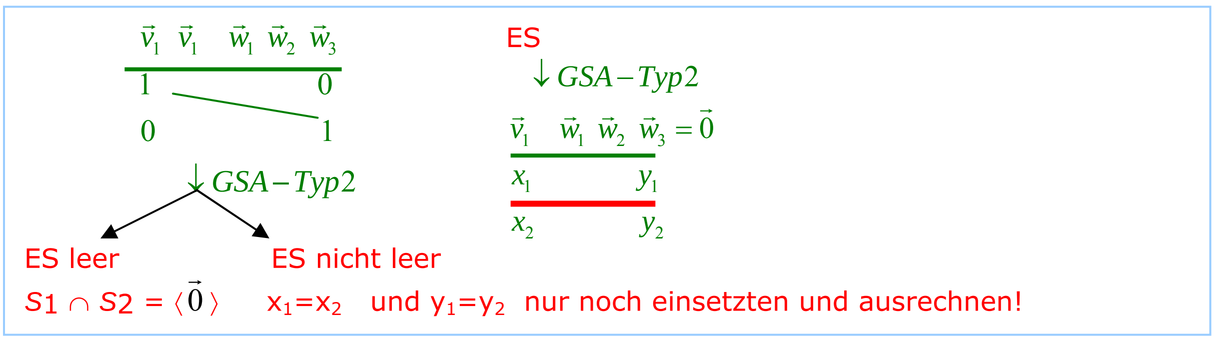
Das GLS ist lösbar und 3 Basisvektoren des (dreidimensionalen) Lösungsraums stehen unterhalb der Abtrennung. Aus diesen 3 Basisvektoren des Lösungsraums lassen sich nun auch 3 Vektoren des Schnittraums ablesen – es gilt (roter Trennstrich):

$$\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$
$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$
$$\vec{u}_3 = \vec{w}_3 = -4\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Es gilt also $S1 \cap S2 = <\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3> = <\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix}>$

Anmerkung: Obgleich die beim GSA unterhalb der Abtrennung stehenden Lösungsvektoren immer eine Basis des Lösungsraums darstellen, müssen die aus ihnen abgeleiteten Schnittvektoren keine Basis des Schnittraums sein. Hierfür muß mit den Schnittvektoren ein GSA Typ 1 durchgeführt werden. Dessen ausgezeichnete Spalten stellen dann eine Basis des Schnittraums dar. Im Beispiel sind nur zwei der Schnittvektoren linear unabhängig, sodaß ohne den Linearspann zu verändern einer gestrichen werden kann (1. Hauptsatz über Erzeugendensysteme).

Es gilt immer folgender Satz:
dim ($S_1 \oplus S_2$) = dim S_1 + dim S_2 – dim ($S_1 \cap S_2$) $S_1 \oplus S_2$ ist hierbei der durch <u>alle</u> Vektoren aufgespannte Raum



Die letzte Gleichung entspricht einem homogenen GLS, daher ist nun ein GSA vom Typ 2 durchzuführen.

Ist dessen Endschema leer, so gilt $S1 \cap S2 = \langle\vec{0}\rangle$. Anderenfalls sind aus den Lösungsvektoren die den Schnitt aufspannenden Vektoren abzuleiten (roter Trennstrichs).

Aufgabe(A35)

Es sei $S = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-7\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-4\\-3\\-8\end{pmatrix} \right\rangle$.

Überprüfen Sie, ob $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ mit $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}0\\3\\-9\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}2\\7\\-11\\1\end{pmatrix}$ Basis von S ist!

I	II					
0	(2)	1	3	1	-2	-3
3	7	1	4	3	-1	-4
-9	-11	2	3	-4	-7	-3
-3	1	3	8	1	-7	-8

I					
0	0	0	0	0	0
(3)	5	-13	-1	6	13
-9	-15	39	3	-18	-39
-3	-5	13	1	-6	-13

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Dieses Endschema liefert die Bedingungen: $LU(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ und $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m) \subseteq (\vec{w}_1, \vec{w}_2)$

Allgemeines Verfahren:

(a) $(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k)$ ist ein Erzeugendensystem von S . Hierfür muss ein GSA Typ 3 das Endschema leer | O liefern.

(b)Es fehlt noch die hinreichende Bedingung: $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m) \supseteq (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k)$. Hierzu ist noch für $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m)$ ein GSA Typ 1 durchzuführen, bei dem die Anzahl der Auszeichnungen identisch mit (a) ist.

Aufgabe(A36)

Ergänzen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis des IR^4!

Allgemeines Verfahren:

Ergänzung mit den Einheitsvektoren des IR^n $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Ein solcher Linearspann ist immer ein Erzeugendensystem des IR^n. Nun ist ein GSA Typ 1 durchzuführen mit der Nebenbedingung, erst die $\vec{v}$ -Spalten auszuzeichnen. Von den $\vec{v}$ -Spalten darf wegen der LU-Forderung keine zu 0 auslaufen. Eine Basis ist dann: $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{e}_{\sigma_{m+1}-m}, \ldots, \vec{e}_{\sigma_n - m})$, ergänzt wird also um die Einheitsvektoren aus den danach ausgezeichneten Spalten.

I	II	E1	E2	E3	E4
(1)	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

II	E1	E2	E3	E4
0	0	0	0	0
(1)	-1	1	0	0
1	-1	0	1	0
1	-1	0	0	1

E1	E2	E3	E4
0	0	0	0
0	0	0	0
0	-1	(1)	0
0	-1	0	1

E1	E2	E4
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	-1	(1)

E1	E2
0	0
0	0
0	0
0	0

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ ist demnach eine Basis des IR^4 dar.

Aufgabe(A37)

$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ Zeigen Sie, dass $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ eine Basis von $S = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle$ ist!

Ergänzen Sie $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von *S*!

Für die den ersten Teil der Aufgabe muß nur LU $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ gezeigt werden:

GSA Typ I:

I	II	III
(5)	3	3
2	6	5
8	3	4
3	4	7

II	III
0	0
(24)	19
-9	-4
11	26

II
0
0
(15)
83

Allg. Verfahren für Teil 2:

Unter der Voraussetzung $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in S$ ist das mit den $\vec{w}$-Vektoren ergänzte Tupel $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_l)$ ein Erzeugendensystem für *S*. Nun wird der GSA Typ 1 durchgeführt mit der Nebenbedingung, erst die $\vec{v}$-Spalten auszuzeichnen (vgl. letzte Aufgabe). Bei der Durchführung sind 3 Fälle zu unterscheiden:

(a)Von den $\vec{v}$-Spalten läuft eine zu 0 aus. Wegen der LU-Forderung kann keine Basis ergänzt werden.

(b)Mind. einer der $\vec{v}$-Vektoren ist nicht Element von *S*. Dieser Fall ist im GSA Typ 1 nur zu erkennen, wenn vorher dim *S* ermittelt wurde (*hier wurde LU* $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ *festgestellt, also dim S = l*). Dann ist in diesem Fall die Anzahl der Auszeichnungen *d* ≠ dim *S* ist.

Anmerkung: Ohne die Kenntnis von dim S kann dieser Fall auch in einem GSA Typ 3 erkannt werden. Dort kann dim S nämlich leicht als Differenz aus der Anzahl der $\vec{w}$-Vektoren l und der Anzahl der zu 0 ausgelaufenen $\vec{w}$-Spalten, deren Nulldarstellung ohne $\vec{v}$-Vektoren möglich ist, ermittelt werden.

(c)Eine Basis lautet $\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{w}_{\sigma_{m+1}-m}, \ldots, \vec{w}_{\sigma_l - m}\right)$, ergänzt wird also um die $\vec{w}$-Vektoren aus den ausgezeichneten Spalten.

GSA Typ I:

V	W1	W2	W3
4	5	3	3
-8	2	6	5
10	8	3	4
-2	3	4	7

W1	W2	W3
0	0	0
48	48	44
-18	-18	-14
22	22	34

W2	W3
0	0
0	0
0	30
0	166

W2
0
0
0
0

$(\vec{v}, \vec{w}_1, \vec{w}_3)$ ist eine Basis von *S*.

Aufgabe(A38)

Lösen Sie $\begin{matrix} 2x_1 & +2x_2=0 \\ 4x_1 & +7x_2=0 \\ 22x_1 & +44x_2=0 \\ 3x_1 & +2x_2=0 \end{matrix}$ Homogene Gleichungssystem (4x2)GLS mit GSA!

GSA-Typ2

I	II
(2)	2
4	7
22	44
3	2
1	0
0	1

II
0
3
22
-1
-1
1

ENDE_KZ='LU' $\Rightarrow \mathbb{L}=(\vec{0})$

Aufgabe(A39)

Lösen Sie
$$\begin{aligned} 2x_1 &+x_2+3x_3 &+x_4-2x_5&=0\\ 4x_1 &+x_2+3x_3+3x_4 &+8x_5&=0\\ 3x_1+2x_2 &+x_3 \;+6x_4 &+6x_5&=0\\ x_1 &+x_2 &+x_4+2x_5&=0 \end{aligned}$$
Homogene Gleichungssystem (4x5)GLS mit GSA!

5 Vektoren von IR^4=>"LA" immer

GSA-Typ2

I	II	III	IV	V
2	(1)	3	1	-2
4	1	3	3	8
3	2	1	6	6
1	1	0	0	2
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

I	III	IV	V
0	0	0	0
2	0	2	10
-1	-5	4	10
(-1)	-3	2	4
1	0	0	0
-2	-3	-1	-2
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

III	IV	V
0	0	0
-6	6	18
(-2)	2	6
0	0	0
-3	2	4
3	-5	-6
1	0	-1
0	1	0
0	0	1

IV	V
0	0
0	0
0	0
0	0
-1	-5
2	3
1	3
1	0
0	1

$$IL=<\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\3\\3\\0\\1\end{pmatrix}>$$

Aufgabe(A40)

Lösen Sie
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3-x_4&=3\\ 2x_1-x_2+3x_3+3x_4&=-2\\ 5x_1+2x_2+x_3-x_4&=-5\\ -4x_1 \qquad +8x_3+6x_4&=11 \end{aligned}$$
Inhomogene Gleichungssystem (4x5)GLS mit GSA!

GSA4

I	II	III	IV	A
(1)	3	2	-1	3
2	-1	3	3	-2
5	2	1	-1	-5
-4	0	8	6	11
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

II	III	IV	A
0	0	0	0
(-7)	-1	5	-8
-13	-9	4	-20
12	16	2	23
-3	-2	1	-3
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

III	IV	A
0	0	0
0	0	0
(50)	37	36
-100	-74	-65
11	8	-3
1	-5	8
-7	0	0
0	-7	0
0	0	-7

IV	A
0	0
0	0
0	0
0	25
-1	-39
-41	26
37	18
-50	0
0	-25

$\vec{b}$ läuft nicht zu 0 aus, d.h. $\vec{b}$ ist von den Koeffizientenvektoren linear unabhängig.

IL = ∅

Stiefelalgorithmus (SA)

hierbei wird die Pivot-Zeile – die ja beim GSA immer auf 0 gebracht wird – Speicherplatzoptimierend für die Erfassung der durchgeführten erlaubten Operationen – beim GSA unterhalb der Abtrennung erfasst – genutzt:

1) Pivot-Wahl:
links der Abtrennung, ungleich 0, in einer nicht (!) beschrifteten Zeile

2) Form des Neuschemas:
ausgezeichnete Spalte entfällt, vor aktuell ausgezeichneter Zeile (!) Notation der aktuell ausgezeichnete röm. Spaltennummer, Spalten mit einer 0 in der ausgezeichneten Zeile unverändert übernehmen

3) Aufstellen erlaubter Operationen:
✸ · [umzurechnende Spalte] + ⊗ · [ausgezeichnete Spalte] = 0 (✸ .. Pivot, ⊗ .. Zahl zur Erzeugung v. 0)

4) Neue Rautenzeile:
ergibt sich aus linkem Teil der erlaubten Operationen (Pivot · altes Rautenelement)

5) Neue ausgezeichnete Zeile:
ergibt sich aus rechtem Teil der erlaubten Operationen (⊗ · altes Rautenelement)

6) Stiefel-Schema füllen:
wie bei GSA

Aufgabe(A41)

Lösen Sie folgendes inhomogene GLS aus A40 mit dem Stiefelalgorithmus (SSA)!

SSA4

	I	II	III	IV	A
	(1)	3	2	-1	3
	2	-1	3	3	-2
	5	2	1	-1	-5
	-4	0	8	6	11
R	1	1	1	1	1

	II	III	IV	A
→ I	-3	-2	1	-3
	(-7)	-1	5	-8
	-13	-9	4	-20
	12	16	2	23
R	1	1	1	1

	III	IV	A
I	11	8	-3
→ II	1	-5	8
	(50)	37	36
	-100	-74	-65
R	-7	-7	-7

	IV	A
I	-1	-39
II	-41	26
→ III	37	18
	0	25
R	-50	-25

$\vec{b}$ läuft nicht zu 0 aus, d.h. $\vec{b}$ ist von den Koeffizientenvektoren linear unabhängig.

IL = ∅

Aufgabe(A42)

Lösen Sie folgendes inhomogene GLS (mit dem GSA und dem Stiefelalgorithmus)!

GSA4

	I	II	III	A
	1	-3	4	-2
	-2	6	-3	2
	3	-7	8	-3
	-2	8	-2	3
	1	0	0	0
	0	1	0	0
	0	0	1	0
X	0	0	0	1

	II	III	A
	0	0	0
	0	5	-2
	2	-4	3
	2	6	-1
	3	-4	2
	1	0	0
	0	1	0
X	0	0	1

	III	A
	0	0
	5	-4
	0	0
	10	-8
	2	-5
	2	-3
	1	0
X	0	2

	A
	0
	0
	0
	0
	-17
	-7
	4
X	10

Der Ergebnisvektor rechts läuft zu 0 aus, d.h. er ist linear von den anderen abhängig, das GLS ist demnach lösbar. Die Lösung ist darüber hinaus eindeutig, weil die links stehenden Vektoren linear unabhängig sind (End-Schema leer bzw. ENDE-KZ='LU').

Es gilt: $-10\vec{y} = -17\vec{a}_1 - 7\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3 \ also\ IL = \begin{pmatrix} 1,7 \\ 0,7 \\ -0,4 \end{pmatrix}$

SSA4

	I	II	III	A
	1	-3	4	-2
	-2	6	-3	2
	3	-7	8	-3
	-2	8	-2	3
R	1	1	1	1

	II	III	A
→ I	3	-4	2
	0	5	-2
	2	-4	3
	2	6	-1
R	1	1	1

	III	A
I	2	-5
	5	-4
→ II	2	-3
	10	-8
R	1	2

	A
I	-17
	0
II	-7
→ III	4
R	10

Analog der Interpretation des Endschemas beim GSA gilt hier: Das GLS ist lösbar, wenn in sämtlichen nicht beschrifteten Zeilen Nullen erzeugt wurden. Die Lösung ist eindeutig, wenn alle Spalten links der Abtrennung verschwunden sind („LU").

Aufgabe(A43)

Lösen Sie folgendes homogene GLS mit dem Stiefelalgorithmus (SSA)!

SSA2

	I	II	III	IV	V
	(3)	3	-3	4	8
	5	5	-5	11	22
	0	7	-2	3	6
	2	-5	0	4	8
R	1	1	1	1	1

	II	III	IV	V
→ I	-1	1	-4	-8
	0	0	13	26
	(7)	-2	9	18
	-7	2	4	8
R	1	1	3	3

	III	IV	V
I	5	-19	-38
	0	(91)	182
→ II	2	-9	-18
	0	91	182
R	7	21	21

	III	V
I	5	0
→ IV	0	-2
II	2	0
	0	0
R	7	1

Es gibt 2 nicht-triviale Nulldarstellungen; zwei Basisvektoren für den Lösungsraum

lauten: $IL =< \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} >$ oder $IL = s_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ mit\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}$

Aufgabe(A44)

Lösen Sie folgendes inhomogene GLS (mit dem Stiefelalgorithmus)!

SSA4

	I	II	III	IV	V	A
	(1)	1	1	1	2	3
	2	3	5	2	-1	1
	1	-1	-1	-1	-3	-2
R	1	1	1	1	1	1

	II	III	IV	V	A
→ I	-1	-1	-1	-2	-3
	(1)	3	0	-5	-5
	-2	-2	-2	-5	-5
R	1	1	1	1	1

	III	IV	V	A
I	2	-1	-7	-8
→ II	-3	0	5	5
	(4)	-2	-15	-15
R	1	1	1	1

	IV	V	A
I	0	2	-2
II	-3	-25	-25
→ III	1	15	15
R	2	4	4

Das GLS ist lösbar (nur Nullen in nicht beschrifteten Zeilen, es gibt nämlich keine). Ferner sind die Vektoren IV und V linear von den anderen abhängig – erkennbar daran, dass sie stehen geblieben sind, ohne das eine weitere Pivot-Auswahl möglich wäre (Ende-KZ='LA'). Das zugehörige homogene GLS ist somit (sozusagen zweifach) lösbar und zwar gemäß den folgenden Gleichungen:

$$0\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4 + 0\vec{a}_5 = \vec{0} \quad und \quad 2\vec{a}_1 - 25\vec{a}_2 + 15\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4 + 4\vec{a}_5 = \vec{0}$$

Für das iGLS gilt dann: $IL_I = i + IL_H = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 6,25 \\ -3,75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -25 \\ 15 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ > mit s1, s2 ∈ IR

Aufgabe(A45)

Bestimmen Sie eine Basis von $U = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \\ \vec{v}_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = 0 \right\}$!

Verfahren zur Bestimmung von Basen:

1) Die Vektoren $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m$ bilden das Erzeugendensystem eines Spanns S, auf das der GSA Typ 1 angewendet wird. Im Zuge dieses GSA entstehen 2 Basen und zwar($\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m$) und ($\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_d$)
Wegen des Vorliegens von Variablen ist dieses Verfahren hier nicht anwendbar.
2) Darstellung von S als Lösungsmenge eines homogenen GLS. Dann kann eine Basis dieser Lösungsmenge mit dem GSA Typ 2 (bzw. SSA) bestimmt werden.

Wegen $V_1 - 2V_2 - V_3 + 0V_4 = 0$ gilt $U = IL\,(1, -2, -1, 0)$.

(1)	-2	-1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

0	0	0
2	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Eine Basis lautet also: $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Aufgabe(A46)

Bestimmen Sie eine Basis von $U = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{v}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} - \vec{v}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \vec{v}_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix} \right\}$!

Es kommt wieder das bei Aufgabe 45 benutzte Verfahren 2 zur Anwendung, hier muss die Lösungsmenge des entsprechenden GLS erst bestimmt werden. Um das GLS homogen zu machen, wird der rechte Vektor auf beiden Seiten subtrahiert:

Dann gilt: $\vec{v}_1 \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - \vec{v}_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - \vec{v}_3 \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \;\Rightarrow U = IL = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{0} \right)$

I	II	III
(-3)	3	-3
-3	3	-3
-6	6	-6
1	0	0
0	1	0
0	0	1

II	III
0	0
0	0
0	0
1	-1
1	0
0	1

Die Anzahl der Basisvektoren und damit dim(U) beträgt 2, was der Anzahl der zu 0 auslaufenden Spalten entspricht.

Die unterhalb der Abtrennung stehenden Vektoren stellen eine Basis von U dar.

Aufgabe(A47)

Sei U die Menge aller Vektoren mit $U = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \\ \vec{v}_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{v}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{v}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \\ \vec{v}_4 \end{pmatrix} \right\}$

Für welche $r \in IR$ gilt a)dim U=0 b)dim U=1 c)dim U=2 d) dim U=3 e) dim U=4

I	II	III	IV
$1-r$	1	1	1
1	$1-r$	1	1
1	1	$1-r$	1
1	1	1	$1-r$

II	III	IV
$(2-r)\cdot r$	r	r
0	0	0
r	$-r$	0
r	0	$-r$

↗ $r \neq 0$ (Pivot vorhanden)
↘ $r = 0$ (Ende-KZ, dim U = 3)

II	III
$(3-r)\cdot r$	r
0	0
0	0
r	$-r$

Pivot immer vorhanden ($r \neq 0$)

III
$(4-r)\cdot r$
0
0
0

↗ $r \neq 4$ (Pivot vorh., dim U = 0)
↘ $r = 3$ (Ende-KZ, dim U = 1)

Lösung:
a) dim U = 0 ⇔ $r \in IR \setminus \{0,4\}$
b) dim U = 1 ⇔ $r = 4$
c) dim U = 2 nie
d) dim U = 3 ⇔ $r = 0$
e) dim U = 4 nie

Analog: Aufgabe 30

Aufgabe(A48)

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\sphericalangle\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ und $\sphericalangle\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$!

Herleitung über Cosinus-Satz: $|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$

Auflösung nach $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

$$\sphericalangle\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\arccos\frac{(3\cdot-1)+(4\cdot2)}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\arccos\frac{5}{5\sqrt{5}}\approx63{,}4^\circ$$

$$\sphericalangle\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\arccos\frac{(3\cdot1)+(4\cdot-3)}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\arccos\frac{-9}{5\sqrt{10}}\approx124{,}7^\circ$$

Aufgabe(A49)

Sei V die Menge aller Vektoren

$$\text{mit } V=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}\in\mathrm{IR}^4\;\middle|\;v_1\begin{pmatrix}10\\4\\0\\-4\end{pmatrix}+v_2\begin{pmatrix}13\\7\\-6\\-7\end{pmatrix}+v_3\begin{pmatrix}16\\4\\-6\\-4\end{pmatrix}+v_4\begin{pmatrix}9\\-3\\-6\\3\end{pmatrix}=2r\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}\right\}.$$

Für welche $r\in$ IR gilt

a) dim V = 0 b) dim V = 1 c) dim V = 2 d) dim V = 3 e) dim V = 4

I	II	III	III
$10-2r$	13	16	9
(4)	$7-2r$	4	-3
0	-6	$-6-2r$	-6
-4	-7	-4	$3-2r$

II	III	IV
$-18+34r-r^2$	$24+8r$	$66-6r$
0	0	0
-24	$-24-8r$	(-24)
$-8r$	0	$-8r$

II	III
$96(r-3)(r-7)$	$-48(r+3)(r-7)$
0	0
0	0
0	$-64(r+3)r$

II/III
$\pm6144(r-3)(r-7)(r+3)r$
0
0
dito

In den Schemata 0 und 1 ist in jedem Fall eine Pivot-Auszeichnung möglich. Ab dem Schema 2 kommt r in allen potientiellen Pivot-Elementen vor. Die betreffenden, bewußt faktorisierten Polynome haben jedoch keine gemeinsame Nullstelle, so daß für jedes $r\in$ IR zumindest ein Pivot verschieden von 0 wird. Egal welches der drei oben abgebildeten Pivotelemente benutzt wird, der letzte im neuen Schema verbleibende Term besitzt immer die Form $\pm6144(r-3)(r-7)(r+3)r$ und damit die Nullstellen $\{-3, 0, 3, 7\}$.

Lösung:
- a) dim V = 0 $\Leftrightarrow r\in\mathrm{IR}\setminus\{-3, 0, 3, 7\}$
- b) dim V = 1 $\Leftrightarrow r\in\{-3, 0, 3, 7\}$
- c) dim V = 2 nie
- d) dim V = 3 nie
- e) dim V = 4 nie

Aufgabe(A50)

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\;\vec{v}_2=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit dem Stiefelalgorithmus alle Basen von $<\vec{v}_1,\vec{e}_3,\vec{e}_3+\vec{e}_4>\cap<\vec{e}_4,\vec{v}_2>$!

	I	II	III	IV	V
	(1)	0	0	0	4
	2	0	0	0	3
	3	1	1	0	2
	4	0	1	1	1
R	1	1	1	1	1

	II	III	IV	V
$\rightarrow$ I	0	0	0	-4
	0	0	0	(-5)
	1	1	0	-10
	0	1	1	-15
R	1	1	1	1

	II	III	IV
I	0	0	0
$\rightarrow$ V	0	0	0
	(1)	1	0
	0	1	1
R	1	1	1

	III	IV
I	0	0
V	0	0
$\rightarrow$ II	-1	0
	1	(1)
R	1	1

	III
I	0
V	0
II	-1
$\rightarrow$ IV	-1
R	1

Eine Basis leitet sich aus dem Endschema her:

I	0
II	-1
III	1
IV	$\boxed{-1}$
V	0

Wenn $\vec{e}_4$ eine Basis ist, dann ergeben sich alle Basen als: $t*\vec{e}_4$ mit $t\in$IR\{0}.

Aufgaben

Analysis

Aufgabe 1

Für welche reellen Zahlen $r \in R$ besitzt die Funktion $f(x) = x^2 + 7rx + 13/4r^2$ in den Schnittpunkten mit der x-Achse senkrecht zueinander stehende Tangenten?

Aufgabe 2

Die Graphen der Funktionen $f(x) = 4x - x^3$ und $g(x) = 2x - x^2$ schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie

a) den Brennpunkt der Parabel $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$,

b) die Nullstelle der Tangente durch $P_T(-1|f(-1))$, $f(x) = e^{x2+3x+2} + 3$,

c) die Steigung der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 11)^2}$ an der Stelle $x = 4$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Koeffizienten einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades, deren Graph

- im Punkt (0 | 0) einen Sattelpunkt besitzt,
- die Abszisse (x-Achse) im Punkt (4 | 0) schneidet und
- mit der Abszisse eine Fläche vom Inhalt 32/5 einschließt.

Statistik

Aufgabe 1
Es sei θ = 5% der Ausschussanteil der Grundgesamtheit G.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Anteilswert einer zufällig aus G gezogenen Stichprobe vom Umfang n = 400 größer als 6%, wenn gilt: N = 10000
(N Umfang der Grundgesamtheit G)?

Aufgabe 2
Die Partei P besitze den Stimmenanteil θ = 8%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stimmen von n = 12000 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten
a) mindestens 8,8%
b) genau 8,1%
für P?

Aufgabe 3
Eine Klausur besteht aus 10 Fragen, die mit ja oder nein zu beantworten sind.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Student mindestens fünf Fragen richtig beantworten, wenn er jede Frage in Abhängigkeit vom Ausgang eines Wurfes mit einer fairen Münze bei Wappen mit ja und bei Zahl mit nein beantwortet?

Aufgabe 4
Das Füllgewicht F [in l] der von einer bestimmten Abfüllmaschine stammenden Mineralwasserflaschen sei N(μ, 0.000001)-verteilt. Auf welches durchschnittliche Füllgewicht μ ist diese Anlage mindestens einzustellen, wenn bei der Produktion von 1-Liter-Flaschen der Ausschussanteil (Anteil der Flaschen mit einem Füllgewicht von F < 1 l) höchstens 1h betragen soll?

Aufgabe 5
Eine ideale Münze mit den Seiten Kopf und Zahl wird dreimal geworfen. Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten W(A/B) und W(B/A) für:
A : Kopf im zweiten Wurf, B : dreimal Kopf.

Aufgabe 6
Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer Normalverteilten Zufallszahl X, wenn gilt:
W(X > 7) = 0, 1587), W(X ≤ 2, 5) = 0, 3085.

Aufgabe 7
Etwa 1% der weiblichen Bundesbürger sind rot-grün-blind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter n = 1000 zufällig ausgewählten Studentinnen mehr als 15 rotgrün-blind?

Aufgabe 8
Die Zufallsgröße X sei Normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 5 und der Varianz δ^2 = 16.

Bestimmen Sie ein zu μ symmetrisches Intervall [a; b] mit W(a ≤ X ≤ b) = 0, 95.

Lineare Algebra

Aufgabe 1

a) $21,\overline{30}1_4 = ?_{10}$

b) $21,\overline{30}1_4 = ?_8$

Aufgabe 2

a) Stellen Sie die rationale Zahl

$$-\frac{206}{7}$$

als 64-Bit-IEEE-754-Long-Real in Big-Endian-Hex-Dump-Format dar!

b) Die 64-Bit-IEEE-754-Long-Real Darstellung einer rationalen Zahl in Little-Endian-Hex-Dump-Format lautet:
333333333333F33F:
Stellen Sie diese Zahl als Dezimalbruchentwicklung dar!

Aufgabe 3

Teegroßhändler Mercator stellt aus 4 Sorten Tee 5 Mischungen M1 ... M5 her. Die Zusammensetzung von 100g-Packungen geht aus den unten aufgeführten Spaltenvektoren hervor. Zum Osterfest mischt Mercator eine neue Mischung M, die sich sowohl durch Mischen von M1, M2, M3 als auch durch Mischen von M4, M5 herstellen läßt. Ermitteln Sie die Zusammensetzung einer 100g-Packung der Mischung M!

Die Zusammensetzung einer 100g-Packung führt über den Schnitt der beiden folgenden Linearspanns

$$\begin{array}{l} \\ \text{1.Sorte} \\ \text{2.Sorte} \\ \text{3.Sorte} \\ \text{4.Sorte} \end{array} \quad \begin{array}{c} \quad M1 \qquad M2 \qquad M3 \qquad\qquad M4 \qquad M5 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix} \right\rangle \end{array}$$

III
0
0
0
0
2
2
1
-3
-2

Aufgabe 4

Eine Winzergenossenschaft versendet ihren Wein nur in Gebinden $G_1,\ldots,G_5$ mit folgender Zusammensetzung (in Flaschen)

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
Qualitätswein	156	168	48	36	36
Prädikatswein	120	132	36	24	36
Spätlese	72	84	24	12	24

Zeigen Sie, daß man jede Lieferung aus Gebinden G_1,G_2,G_3 durch eine flaschenmäßig gleichwertige Lieferung aus Gebinden G_3,G_4,G_5 ersetzen kann! Stellen Sie eine entsprechende Formel auf!

Mathematisch muß gelten: $? \cdot G_3 + ? \cdot G_4 + ? \cdot G_5 = ? \cdot G_1 + ? \cdot G_2 + ? \cdot G_3$ (Nebenbedingung: $? \in$ IN)
Die Nebenbedingung wird operationalisiert, indem die 3 einzelnen Gleichungssysteme gelöst werden. Denn schon eine Einheit der Gebinde G_1,G_2 oder G_3 muß mit natürlichen Skalaren für G_3,G_4,G_5 ersetzbar sein. Natürliche Vielfache und Linearkombinationen lassen sich daraus dann beliebig zusammenstellen.

Aufgabe 5

Lösen Sie folgendes inhomogene GLS (mit dem Stiefelalgorithmus)!

I	II	III	IV	V
3	3	-3	4	8
5	5	-5	11	22
0	7	-2	3	6
2	-5	0	4	8

zum Üben cramerschen Regel GLS 2x2

Lösungen

Analysis

Aufgabe 1
|r| = 1/6

Aufgabe 2
A = 37/12

Aufgabe 3
a) (3/4 | 1)
b) − 5
c) 16/9

Aufgabe 4
f(x) = $-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$

Statistik

Aufgabe 1
0, 1793

Aufgabe 2
a) 0, 0006
b) 0, 0125

Aufgabe 3
0,623

Aufgabe 4
1,00308

Aufgabe 5
W(A/B) = 1, W(B/A) = ¼

Aufgabe 6
X ~ N(4, 9)

Aufgabe 7
W(X > 15) = 0, 056

Aufgabe 8
I = [−2,84; 12,84]

Lineare Algebra

Aufgabe 1
a) 625/63= 9,[920634]920634920634920634$_{10}$
b) 11, 58/63 => 11, [72]727272$_{8}$

Aufgabe 2
a) 403D6DB6DB6DB6DB
b) 3FF3333333333333= +1.2

Aufgabe 3
Es läuft eine und nur eine Spalte zu 0 aus. Der Lösungsraum des homogenen GLS ist also eindimensional und die einzige Möglichkeit (abgesehen von reellen Vielfachen) den Nullvektor darzustellen lautet:
$2\vec{m}_1 + 2\vec{m}_2 + \vec{m}_3 - 3\vec{m}_4 - 2\vec{m}_5 = \vec{o}$. Dann gibt es auch nur eine (unabhängige) Schnittgleichung u. ein

Basisvektor d.Schnittraums ergibt sich als $2\vec{m}_1 + 2\vec{m}_2 + \vec{m}_3 = 3\vec{m}_4 + 2\vec{m}_5 = \begin{pmatrix} 140 \\ 100 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 20 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$

Theoretisch mögliche Ergebnisse wäre noch ein nur aus dem Nullvektor bestehender Schnitt und eine nicht eindeutige Lösung (dim Schnitt > 1) gewesen). M ist nun jener Vektor aus diesem Schnitt, der eine Spaltensumme von 100 hat, sodaß der oben errechnete Schnittvektor mit dem Faktor 0,2 zu multiplizieren ist.

Aufgabe 4
Mögliches ES

G_1	G_2	G_3
0	0	0
0	0	0
0	0	0
1	2	1
2	1	0
1	1	0
-1	-1	-1

Es gilt LU (G_3,G_4,G_5), deswegen ist die Lösung eindeutig. Die Nebenbedingung ist erfüllt, wenn (nachdem die Extended-Zeile auf -1, d.h. eine Einheit, gebracht wurde) die Lösungsvektoren der 3 Gleichungssysteme nur natürliche Zahlen enthalten. Das ist hier der Fall und es gilt:

$G_1 = 1 \cdot G_3 + 2 \cdot G_4 + 1 \cdot G_5$
$G_2 = 2 \cdot G_3 + 1 \cdot G_4 + 1 \cdot G_5$
$G_3 = 1 \cdot G_3 + 0 \cdot G_4 + 0 \cdot G_5$

Für beliebige Mischungen, also für die oben gesuchte Formel sind diese Gleichungen einfach linear zu kombinieren:

$s_1 \cdot G_1 + s_2 \cdot G_2 + s_3 \cdot G_3 = s_1 \cdot (G_3,G_4,G_5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \cdot (G_3,G_4,G_5) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_3 \cdot (G_3,G_4,G_5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s_1,s_2,s_3 \in \mathbb{N}$

Aufgabe 5
Mögliches ES:

	III	V
I	5	0
→ IV	0	-2
II	2	0
	0	0
R	7	1

Es gibt 2 nicht-triviale Nulldarstellungen;
zwei Basisvektoren für den Lösungsraum lauten: $IL = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Literatur

Mitschrift aus den Vorlesungen zu **Analysis I**, **Statistik I** und **Lineare Algebra I** bei **Prof. Dr. Paul Rietmann** und **Prof. Dr. Hennekemper** an der **Fachhochschule Dortmund** **Fachbereich Informatik**

Analysis

[1] **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** Papula, Lothar, Bd. 1

Statistik

[1] **Statistische Formeln und Tabellen.**
(Bleymüller, J., and Gehlert, G.)
WiSt-Taschenbücher. Vahlen, München, 1999.

[2] **Statistik für Wirtschaftswissenschaftler**
(Bleymüller, J., Gehlert, G., and Gülicher, H.)
(12. überarb. Aufl.). WiSt-Studienkurs. Vahlen, München, 2000.

[3] **Statistik — Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik**
(Hartung, J., Elpelt, B., and Klösener, K.-H.)
Oldenbourg, München, 1999.

[4] **Angewandte Statistik — Anwendung statistischer Methoden**
(Sachs, L)
Vahlen, München, 1999.

[5] **Statistik.**
(Spiegel, M. R.)
Schaum's Outline. McGraw-Hill, Hamburg, 1999.

Lineare Algebra

[1] **Lineare Algebra und Analytische Geometrie**
(M. Andriê, P. Meier)
Bibliographisches Institut; Mannheim/Wien/Zürich 1991

[2] **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I, Lineare Algebra**
(T. Gal, H.-J. Kruse, B. Vogeler, H. Wolf)
Springer; Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo 1991

[3] **Mathematik heute, Leistungskurs Lineare Algebra/Analytische Geometrie**
(H. Griesel, H. Postel)
Schroedel Hannover 1986

[4] **Aufgaben zur Linearen Algebra für Fachhochschulen**
(D. Labuch)
Spektrum Akademischer Verlag; Heidelberg/Berlin 1998